Stochastische parabolische partielle Differentialgleichungen und optimale Impulskontrolle

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Armin Müller
aus
Peine

Göttingen 2000

D7
Referent: Prof. Dr. H. Hering
Korreferent: Prof. Dr. M. Denker
Tag der mündlichen Prüfung: 02.11.2000

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird ein bestimmter Typ stochastischer parabolischer partieller Differentialgleichungen untersucht. Dabei geht es neben der eindeutigen Lösbarkeit auch um die Frage der Regularität der Lösungen. Weiterhin ist es das Ziel, eine optimale Impulskontrolle von geeigneten Lösungen zu konstruieren.

Während für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen eine gut entwickelte, einheitliche Theorie existiert, vgl. [13] und [15], gibt es für die Behandlung von stochastischen partiellen Differentialgleichungen lediglich eine Vielzahl von Ansätzen, vgl. z.B. [5], [12] und [14]. In dieser Arbeit wird der funktionalanalytische Zugang von Øksendal et al. benutzt, vgl. auch [11].

Der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum ist $\Omega = S'(\mathbb{R}) \times S'(\mathbb{R})$, wobei $S'(\mathbb{R})$ der Raum der temperierten Distributionen ist. Das Bochner-Minlos-Theorem liefert dann das Gauß-Poisson-White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß ϑ auf Ω. Analog zu dem Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$ gibt es den Raum $(S)_1 \subseteq L^2(\vartheta)$ der stochastischen Testfunktionen. Sein Dualraum $(S)_{-1}$ ist der so genannte Kondratiev-Raum der stochastischen Distributionen, und $(S)_1 \subseteq L^2(\vartheta) \subseteq (S)_{-1}$ bildet ein Gelfand-Triple. Für eine stochastische Distribution $F \in (S)_{-1}$ und eine glatte Zufallsvariable $f \in (S)_1$ liefert also $< F, f >$ eine Mittelung über eine Teilmenge des Wahrscheinlichkeitsraumes Ω. Das Wickprodukt $\diamond$, definiert über die Wiener-Itô-Chaos-Entwicklung, ermöglicht eine Multiplikation stochastischer Distributionen. Ein zentraler Satz dieser Theorie besagt, dass stochastische Integrale mit der Brownschen Bewegung $B_t(\omega)$ bzw. mit dem Poisson-Prozess $P_t(\omega)$ als Integratoren mithilfe des Wickproduktes auch als Pettis-Integrale im Kondratiev-Raum $(S)_{-1}$ aufgefasst werden dürfen. Dies hat den Vorteil, dass die Integranden nun nicht mehr an die Filtration $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ adaptiert sein müssen. Außerdem braucht man stochastische Differentialgleichungen nicht mehr als stochastische Integralgleichungen zu interpretieren, sondern man hat wirkliche Differentialgleichungen bezüglich der Topologie des

Kondratiev-Raumes $(S)_{-1}$. Dafür bekommt man als Lösungen $U(t,x)$ von stochastischen partiellen Differentialgleichungen nur verallgemeinerte stochastische Prozesse, d.h. es gilt $U(t,x) \in (S)_{-1}$. Deshalb ist es auch besonders interessant herauszufinden, unter welchen Voraussetzungen diese Lösungen regulär sind, d.h. herauszufinden, wann $U(t,x) \in L^p(\vartheta)$ für ein $p \geq 1$ gilt. Außerdem ist nur dann eine stochastische Kontrolle sinnvoll.

Gegenstand dieser Arbeit ist folgende stochastische parabolische partielle Differentialgleichung:

$$LU(t,x) = [\lambda(t,x) \diamond W(t) + \eta(t,x) \diamond V(t)] \diamond U(t,x) + \delta(t,x)$$

mit $U(0,x) = \varphi(x)$, wobei L ein parabolischer Differentialoperator ist und $W(t), V(t), \lambda(t,x), \eta(t,x), \delta(t,x) \in (S)_{-1}$ gilt. Durch das Wickprodukt $\diamond$ wirken die White-Noise-Prozesse multiplikativ auf bestimmte Koeffizienten. $W(t)$ ist der singuläre Gauß-White-Noise-Prozess und damit die Ableitung der Brownschen Bewegung in $(S)_{-1}$, welche einen zeitstetigen zufälligen Einfluss bewirkt. $V(t)$ ist der singuläre kompensierte Poisson-White-Noise-Prozess. Man erhält ihn durch Ableiten des kompensierten Poisson-Prozesses in $(S)_{-1}$, welcher zu diskreten Zeitpunkten einen Sprung verursacht. Diese Differentialgleichung modelliert Diffusionen, die durch eine zufällige Quelle in der Zeit t verrauscht sind, wie z.B. die Wärmeleitung, die Bewegung einer Flüssigkeit, chemische Reaktionsprozesse oder die Ausbreitung von Gas oder Insekten.

In [11] werden stochastische Differentialgleichungen mit Hilfe der Hermite-Transformation in deterministische Differentialgleichungen überführt. Diese werden dann im klassischen Sinn gelöst, und es bleibt die Frage, ob anschließend die inverse Hermite-Transformation angewendet werden kann. Hier wird die stochastische Differentialgleichung direkt in $(S)_{-1}$ gelöst, indem sie in eine äquivalente Integralgleichung umgewandelt wird, sodass sich der Banachsche Fixpunktsatz anwenden lässt. In der Literatur werden selten Poisson-Treiber betrachtet; auch begnügt man sich meistens mit Lösungen in $(S)_{-1}$. Hier wird gezeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Lösung $U(t,x)$ in $L^2(\vartheta)$ liegt. Die Chaos-Entwicklung mittels multipler Itô-Integrale wird benutzt, um die $L^2(\vartheta)$-Norm von $U(t,x)$ abzuschätzen. Danach wird unter weiteren Annahmen eine explizite Lösung ausgerechnet, die in $L^p(\vartheta)$ liegt für alle $p \geq 1$. Für diesen stochastischen Prozess wird im zweiten Teil der Arbeit eine optimale Impulskontrolle konstruiert.

Ziel einer stochastischen Kontrolle ist es, ein derartiges stochastisches System bezüglich eines ökonomischen Kriteriums optimal zu steuern. Das Prinzip einer Impulskontrolle ist, dass zu jedem Stoppzeitpunkt $\theta_n(\omega)$ der betrachtete Prozess (mit Zustandsraum E) um den Impuls $\zeta_n(\omega) \in K$ ($K \subseteq E$, kompakt) verschoben wird. Dabei müssen die Zufallsvariablen θ_n und ζ_n an die Filtration adaptiert sein, d.h. eine Entscheidung über einen Impuls ζ_n kann nur aufgrund der Informationen bis zum Zeitpunkt θ_n gefällt werden. Das ökonomische Kriterium sind hier Kosten irgendeiner Art, die sich als reelle Zahlen angeben lassen. Bezeichne X_t den kontrollierten Prozess. Dann entstehen bei jeder Impulskontrolle $W = (\theta_1, \zeta_1; \theta_2, \zeta_2; \dots)$ folgende erwartete Kosten:

$$J(W) := E[\int_0^\infty e^{-rt} L(X_t)\,dt + \sum_{n=1}^\infty e^{-r\theta_n} \kappa(X_{\theta_n -}, \zeta_n) \chi_{\theta_n < \infty}],$$

wobei r ein konstanter Abzinsungsfaktor ist, L die momentanen Kosten misst und κ die Kosten pro Impuls angibt. Dabei soll gelten $r > 0$ und $\kappa \geq k > 0$. Diese erwarteten Kosten sollen minimiert werden. Da bei jedem Impuls Kosten entstehen, sollte ein Impuls nur dann ausgeübt werden, wenn er die laufenden Kosten $\int_0^\infty e^{-rt} L(X_t)\,dt$ nachhaltig reduziert. Die Frage ist also, wann sollte welcher Impuls ausgeübt werden. Konkrete Anwendungen dieses Modells könnten z.B. Temperaturregulierung oder Schädlingsbekämpfung sein.

Da der zugrunde liegende stochastische Prozess ein Markovprozess ist, wird in dieser Arbeit ein Halbgruppenansatz verwendet, um eine optimale Impulskontrolle zu konstruieren. Der Zustandsraum des stochastischen Prozesses ist unendlichdimensional. Bisher existiert eine Impulskontroll-Theorie aber nur für lokalkompakte Räume, vgl. [2] und [3]. Dort wird eine optimale Impulskontrolle mithilfe der Maximallösung einer sogenannten Quasi-Variationsungleichung konstruiert. Allerdings wird vorausgesetzt, dass die Markov-Halbgruppe starkstetig ist. Man kann schnell nachweisen, dass dies in unserem Modell nicht erfüllt ist. Deshalb wird hier zuerst eine optimale zeitdiskrete Impulskontrolle konstruiert. Mit dieser wird dann die Optimalität einer zeitstetigen Impulskontrolle nachgewiesen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:
In Kapitel 2 werden die Grundlagen zusammengestellt. Es werden der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum, der Kondratiev-Raum, die White-Noise-Prozesse und das Wickprodukt eingeführt. Außerdem werden die Wiener-Itô-Chaos-Entwicklung und der Zusammenhang zwischen stochastischen Integralen und Pettis-Integralen im Kondratiev-Raum vorgestellt. Danach werden im 3. Kapitel die Existenz und Eindeutigkeit der stochastischen parabolischen Differentialgleichung (wie oben beschrieben) bewiesen. In Kapitel 4 wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen antizipierende Lösungen in $L^2(\vartheta)$ existieren. Außerdem wird eine bestimmte adaptierte explizite Lösung ausgerechnet, die in $L^p(\vartheta)$ liegt für alle $p \geq 1$. Im 5. Kapitel wird eine optimale Impulskontrolle der expliziten Lösung konstruiert. Dazu wird erst der zeitdiskrete Fall behandelt, mit welchem dann die Optimalität einer zeitstetigen Impulskontrolle nachgewiesen wird. Schließlich wird im 6. Kapitel ein konkretes Modell vorgestellt, welches die geforderten Eigenschaften erfüllt. Weiter wird ein Verfahren zur approximativen Berechnung der optimalen Kostenfunktion

angegeben. Kapitel 7 enthält eine Zusammenfassung mit weiteren Perspektiven.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. H. Hering für die Unterstützung und die fruchtbaren Diskussionen bedanken.
Bei Herrn Prof. Dr. M. Denker bedanke ich mich für die Übernahme des Korreferates.
Weiterhin danke ich allen, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit geholfen haben, insbesondere Brice, Olaf, Oliver, Paul, Susanne und Wolfgang.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel wird der mathematische Rahmen der Arbeit vorgestellt. Zunächst wird der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum eingeführt, der auf natürliche Weise das geglättete Gauß- und Poisson-White-Noise enthält. Darauf aufbauend wird mit Hilfe der Wiener-Itô-Chaos-Entwicklung der Kondratiev-Raum eingeführt, welcher die singulären Gauß- und Poisson-White-Noise-Prozesse als stochastische Distributionen enthält. Danach wird das Wickprodukt vorgestellt, welches eine Multiplikation von stochastischen Distributionen ermöglicht. Schließlich wird gezeigt, wie man stochastische Integrale mit einer Brownschen Bewegung bzw. mit einem Poisson-Prozesses als Integratoren mithilfe des Wickproduktes als Pettis-Integrale im Kondratiev-Raum auffassen kann. Die meisten Resultate stammen aus [10] und [11].

2.1 Der White-Noise-Wahrscheinlichkeitsraum

Es sei

$$S = S(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \sup_{\alpha \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}} \{(1+x^2)^N \left| \frac{d^\alpha f(x)}{d x^\alpha} \right| \} < \infty, N \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

der Schwartz-Raum der schnell fallenden, glatten, reellen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Auf $S(\mathbb{R})$ wird durch

$$\|f\|_{\alpha,N} := \left\{ \sup_{\alpha \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}} \{(1+x^2)^N \left| \frac{d^\alpha f(x)}{d x^\alpha} \right| \right\} \quad (N \in \mathbb{N}_0 \text{ und } f \in S)$$

eine abzählbare, separierende Familie von Normen definiert. Diese Normen machen S zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum ([17, Theorem 1.37]). Außerdem ist S ein Fréchet-Raum ([17, Theorem 7.4]).

Weiter sei $S' = S'(\mathbb{R})$ der Raum der temperierten Distributionen, d.h. der Dualraum von S mit der schwach-$\star$-Topologie. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S')$ sei die σ-Algebra der Borelschen Mengen. Ferner sei $< \omega, \phi >:= \omega(\phi)$ für $\omega \in S'$, $\phi \in S$ und $\Omega_1 = \Omega_2 = S'(\mathbb{R})$ und $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(S')$.

Satz 2.1.1 *Es gibt genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$ mit der Eigenschaft*

$$\int_{\Omega_1} e^{i<\omega_1,\phi>} \, d\mu(\omega_1) = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \tag{2.1.1}$$

für $\phi \in S(\mathbb{R})$. Weiter gilt für $\phi \in S(\mathbb{R})$ die Isometrie

$$E_\mu[< . , \phi >^2] = \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.1.2}$$

Beweis: [11, Theorem 2.1.1 (Bochner-Minlos-Theorem)] und [11, Lemma 2.1.2]. □

Bemerkung 2.1.2 *μ heißt Gauß-White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß.*

Satz 2.1.3 *Es gibt genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ mit der Eigenschaft*

$$\int_{\Omega_2} e^{i<\omega_2,\phi>} \, d\mu(\omega_2) = e^{\int_{\mathbb{R}}(e^{i\phi(x)}-1)\, dx} \tag{2.1.3}$$

für $\phi \in S(\mathbb{R})$. Weiter gilt für $\phi \in S(\mathbb{R})$ die Isometrie

$$E_\nu[(< . , \phi > - \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx)^2] = \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.1.4}$$

Beweis: [11, Theorem 4.9.1 (Bochner-Minlos-Theorem II)] und [11, Lemma 4.9.3]. □

Bemerkung 2.1.4 *ν heißt Poisson-White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß.*

Im Folgenden sei $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 = S'(\mathbb{R}) \times S'(\mathbb{R})$ der Produktraum und $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ die Produkt-σ-Algebra.

Definition 2.1.5 *Das Produktmaß $\vartheta := \mu \times \nu$ auf $(\Omega, \mathcal{B})$ heißt das* **kombinierte Gauß-Poisson-White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß**.
$(\Omega, \mathcal{B}, \vartheta)$ ist der Gauß-Poisson-White-Noise-Wahrscheinlichkeitsraum.

Im Folgenden gelte $< \omega, \phi > := < \omega_1, \phi_1 > + < \omega_2, \phi_2 >$ für $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ und $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in S(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R})$.

Definition 2.1.6 *a) Die Abbildung $S \times \Omega \to \mathbb{R}$, $(\phi, \omega) \mapsto W_\phi := < \omega_1, \phi >$ heißt* **geglättetes Gauß-White-Noise***.*
b) Die Abbildung $S \times \Omega \to \mathbb{R}, (\phi, \omega) \mapsto V_\phi := < \omega_2, \phi >$ heißt **geglättetes Poisson-White-Noise***.*

Entsprechend gibt es die White-Noise-Prozesse W_{ϕ_t} und V_{ϕ_t} mit $\phi_t(x) = \phi(x - t)$ für $\phi \in S$, $t \geq 0$.

Wegen der Isometrien (2.1.2) und (2.1.4) lassen sich $< \omega_1, \psi > := \lim_{n\to\infty} < \omega_1, \phi_n >$ in $L^2(\mu)$ und $< \omega_2, \psi > := \lim_{n\to\infty} < \omega_2, \phi_n >$ in $L^2(\mu)$ für $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\phi_n \in S$ und $\phi_n \to \psi$ in $L^2(\mathbb{R})$ definieren. Weiter seien $\tilde{B}_t(\omega) := < \omega_1, \chi_{[0,t]} >$ und $\tilde{P}_t(\omega) := < \omega_2, \chi_{[0,t]} >$.

Satz 2.1.7 *a) $\tilde{B}_t(\omega)$ hat eine t-stetige Version $B_t(\omega)$, welche eine Brownsche Bewegung ist.*
b) $\tilde{P}_t(\omega)$ hat eine t-rechtsstetige, ganzzahlige Version $P_t(\omega)$, welche ein Poisson-Prozess ist.

Beweis: a) [11, S. 14/15].
b) [11, S. 184]. □

Bemerkung 2.1.8 *Per Konstruktion sind B_t und P_t unabhängig. Durch $Q_t(\omega) := P_t(\omega) - t$ wird der kompensierte Poisson-Prozess definiert, welcher ein Martingal ist.*

Durch die stochastischen Prozesse $B_t(\omega)$ und $P_t(\omega)$ werden folgende σ-Algebren bzw. Filtrationen erzeugt:

$$\mathcal{F}_t^1 := \sigma\{B_s |\ 0 \leq s \leq t\} = \sigma\{< \omega_1, \phi > \mid \phi \in S, supp\, \phi \subset [0,t]\}, \qquad (2.1.5)$$

$$\mathcal{F}_t^2 := \sigma\{Q_s |\ 0 \leq s \leq t\} = \sigma\{< \omega_2, \phi > \mid \phi \in S, supp\, \phi \subset [0,t]\} \qquad (2.1.6)$$

und

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^1 \times \mathcal{F}_t^2 = \sigma\{< \omega, \phi > \mid \phi = (\phi_1, \phi_2) \in S \times S, supp\, \phi_i \subset [0,t]\}. \qquad (2.1.7)$$

Im Folgenden werden mit den gleichen Bezeichnungen die erweiterten σ-Algebren bezeichnet, die die *üblichen Bedingungen* erfüllen, vgl. auch [13].

2.2 Räume stochastischer Distributionen

Im Folgenden sei $J := (\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}})_c$ die Menge aller Folgen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, bei denen nur endlich viele α_i ungleich Null sind. Weiter sei $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\dots$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ und $\epsilon_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ mit der 1 an der k-ten Stelle. Es gelten folgende Definitionen für $n \in \mathbb{N}_0$:

- $h_n(x) := (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{1}{2}x^2})$ (*Hermite-Polynome*)
- $\xi_n(x) := \dfrac{h_{n-1}(\sqrt{2}x)}{\pi^{\frac{1}{4}}((n-1)!)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}x^2}}$ (*Hermite-Funktionen*)
- $H_\alpha(\omega_1) := \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(< \omega_1, \xi_i >)$ (*Stochastische Hermite-Polynome*)
- $c_n(\omega_2; \psi_1, \dots, \psi_n) :=$

  $$\frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \exp[< \omega_2, \ln(1 + \sum_{j=1}^{n} u_j \psi_j) > - \sum_{j=1}^{n} u_j \int_{\mathbb{R}} \psi_j(x)\, dx]|_{u_1 = \dots = u_n = 0}$$

  mit $\psi_j \in S(\mathbb{R})$
- $C_\alpha(\omega_2) := c_{|\alpha|}(\omega_2; \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{\alpha_1-\text{mal}}, \dots, \underbrace{\xi_m, \dots, \xi_m}_{\alpha_m-\text{mal}})$ (Charlier-Polynome).

Weiter sei $\Gamma := J \times J$, $M_\gamma(\omega) := H_\alpha(\omega_1) C_\beta(\omega_2)$ mit $\gamma = (\alpha, \beta) \in \Gamma$, $\gamma! := \alpha!\beta!$ und $L^2(\vartheta) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int_\Omega f^2(\omega)\, d\vartheta(\omega) < \infty\}$. Mit $\otimes$ ist immer das vervollständigte Tensorprodukt zweier separabler Hilberträume gemeint.

Satz 2.2.1 (Wiener-Itô-Chaos-Entwicklung)
Jedes $f \in L^2(\vartheta)$ hat eine eindeutige Darstellung

$$f(\omega) = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma M_\gamma(\omega) \tag{2.2.1}$$

mit $c_\gamma \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Isometrie

$$\|f\|^2_{L^2(\vartheta)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma!\, c_\gamma^2. \tag{2.2.2}$$

Beweis: Nach Theorem II.10,a) in [16] gilt $L^2(\vartheta) \cong L^2(\mu) \otimes L^2(\nu)$. Damit folgt die Aussage aus Theorem 2.2.4, (4.9.16) und (4.9.17) in [11]. $\square$

Im Folgenden werden die Kondratiev-Räume eingeführt (vgl. auch [11] oder [10]).

Man betrachte die formale Entwicklung:

$$F = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma M_\gamma \tag{2.2.3}$$

mit $c_\gamma \in \mathbb{R}$. Weiter sei für $\rho \in [-1, 1]$ und $q \in \mathbb{Z}$

$$\|F\|^2_{(S)_{\rho,q}} := \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma^2 (\gamma!)^{1+\rho} (2\mathbb{N})^{q\gamma} \tag{2.2.4}$$

mit $\gamma = (\alpha, \beta)$, $(2\mathbb{N})^{q\gamma} = (2\mathbb{N})^{q\alpha}(2\mathbb{N})^{q\beta}$ und $(2\mathbb{N})^\alpha := \prod_{j=1}^\infty (2j)^{\alpha j}$.

Die **Kondratiev-Hilberträume** $(\mathbf{S})_{\rho,\mathbf{q}}$ werden definiert durch

$$(S)_{\rho,q} := \{F = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma M_\gamma \text{ als formale Summe } \mid \|F\|^2_{(S)_{\rho,q}} < \infty\}. \tag{2.2.5}$$

Für $q_1 \leq q_2$ gilt $(S)_{\rho,q_2} \subseteq (S)_{\rho,q_1}$.

Der **Raum der stochastischen Testfunktionen** $(\mathbf{S})_\rho$ wird definiert durch

$$(S)_\rho := \bigcap_{q \in \mathbb{N}} (S)_{\rho,q} \tag{2.2.6}$$

mit der projektiven Limestopologie bei $0 \leq \rho \leq 1$.

Der **Kondratiev-Raum der stochastischen Distributionen** $(\mathbf{S})_{-\rho}$ wird definiert durch

$$(S)_{-\rho} := \bigcup_{q \in \mathbb{N}} (S)_{-\rho,-q} \tag{2.2.7}$$

mit der induktiven Limestopologie bei $0 \leq \rho \leq 1$. Damit gilt $(S)_{0,0} = L^2(\vartheta)$, und $(S)_\rho \subseteq L^2(\vartheta) \subseteq (S)_{-\rho}$ ist ein Gelfand-Triple. Außerdem ist $(S)_{-\rho}$ der Dualraum von $(S)_\rho$ durch die Dualität $< F, f >= \sum_\gamma a_\gamma b_\gamma \gamma!$ mit $F = \sum_\gamma a_\gamma M_\gamma \in (S)_{-1}$ und $f = \sum_\gamma b_\gamma M_\gamma \in (S)_1$. Im Folgenden wird $(S)_{-1}$ einfach als Kondratiev-Raum bezeichnet.

Lemma 2.2.2 *Es gilt:*

$$a)\quad W_\phi(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi, \xi_j) H_{\epsilon_j}(\omega_1) \in (S)_1, \tag{2.2.8}$$

$$b)\quad V_\phi(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi, \xi_j) C_{\epsilon_j}(\omega_2) \in (S)_1. \tag{2.2.9}$$

Beweis: a) Die Hermite-Funktionen $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bilden ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} W_\phi(\omega) &= <\omega_1, \phi> = <\omega_1, \sum_{j=1}^{\infty}(\phi,\xi_j)\xi_j> \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(\phi,\xi_j) <\omega_1, \xi_j> = \sum_{j=1}^{\infty}(\phi,\xi_j) H_{\epsilon_j}(\omega_1). \end{aligned}$$

Weiter gilt $\forall q \in \mathbb{N}$

$$\|W_\phi\|_{(S)_{1,q}} = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi,\xi_j)^2 (2j) < \infty$$

wegen Theorem V.13 in [16].
b) Analog zu a). □

Definition 2.2.3 *a) Der* **singuläre Gauß-White-Noise-Prozess** *wird definiert durch die formale Entwicklung für $t \geq 0$:*

$$W_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) H_{\epsilon_k}. \tag{2.2.10}$$

b) Der **singuläre kompensierte Poisson-White-Noise-Prozess** *wird definiert durch die formale Entwicklung für $t \geq 0$:*

$$V_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) C_{\epsilon_k}. \tag{2.2.11}$$

Lemma 2.2.4 *Sei $q > 1$. Dann gilt $W_t, V_t \in (S)_{-1,-q}$, $\sup_{t\geq 0}\{\|W_t\|_{(S)_{-1,-q}}\} < \infty$ und $\sup_{t\geq 0}\{\|V_t\|_{(S)_{-1,-q}}\} < \infty$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis: Es gilt $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\xi_n(x)| = O(n^{\frac{1}{12}})$ ([9, Kap. 21]). Also gibt es ein $C > 0$ mit $\forall t \geq 0, k \in \mathbb{N}: \; |\xi_k(t)| < C$. Damit folgt $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2(t)(2k)^{-q} \leq C^2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-q} < \infty$ wegen Proposition 2.3.3 in [11]. □

Weiter sei

$$< F, f >_{(S)_{-1,q}} := \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma b_\gamma \tag{2.2.12}$$

für $q \geq 0$, $F = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma M_\gamma \in (S)_{-1,-q}$ und $f = \sum_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma M_\gamma \in (S)_{-1,q}$.

Satz 2.2.5 *Für $q \geq 0$ ist $(S)_{-1,-q}$ isomorph zu dem Dualraum von $(S)_{-1,q}$. Die Isometrie ist gegeben durch $(S)_{-1,-q} \to ((S)_{-1,q})^*$, $F \mapsto < F, . >_{(S)_{-1,q}}$.*

Beweis: Seien F und f wie oben.
a) Dann gilt:

$$\begin{aligned} & |< F, f >_{(S)_{-1,q}}| = |\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma b_\gamma| \\ \leq & \sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma (2\mathbb{N})^{\frac{-q\gamma}{2}} b_\delta (2\mathbb{N})^{\frac{q\gamma}{2}}| \\ \leq & \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma^2 (2\mathbb{N})^{-q\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma^2 (2\mathbb{N})^{q\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Hölder-Ungleichung)} \\ = & \|F\|_{(S)_{-1,-q}} \|f\|_{(S)_{-1,q}}. \end{aligned}$$

b) Weiter sei

$$\tilde{F} := \sum_{\gamma\in\Gamma} (2\mathbb{N})^{-q\gamma} a_\gamma M_\gamma.$$

Dann gilt

$$\|\tilde{F}\|_{(S)_{-1,q}} = \sum_{\gamma\in\Gamma} (2\mathbb{N})^{-2q\gamma} a_\gamma (2\mathbb{N})^{-q\gamma} = \|F\|_{(S)_{-1,-q}},$$

das heißt $\tilde{F} \in (S)_{-1,q}$. Also folgt

$$\begin{aligned} < F, \tilde{F} >_{(S)_{-1,q}} &= \sum_{\gamma\in\Gamma} (2\mathbb{N})^{-q\gamma} a_\gamma^2 \\ &= \|F\|^2_{(S)_{-1,-q}} = \|F\|_{(S)_{-1,-q}} \|F\|_{(S)_{-1,-q}} \\ &= \|F\|_{(S)_{-1,-q}} \|\tilde{F}\|_{(S)_{-1,q}}. \end{aligned}$$

Aus a) und b) folgt, daß $(S)_{-1,-q} \to ((S)_{-1,q})^*$, $F \mapsto < F, . >_{(S)_{-1,q}}$ wohldefiniert ist und eine Isometrie ist. Es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz hat jedes Element in $((S)_{-1,q})^*$ die Gestalt $(g, .)_{(S)_{-1,q}}$ mit $g = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma M_\gamma$, wobei $(. , .)_{(S)_{-1,q}}$ das kanonische Skalarprodukt ist. Nun gilt

$$\tilde{g} := \sum_{\gamma\in\Gamma} (2\mathbb{N})^{q\gamma} c_\gamma M_\gamma \in (S)_{-1,-q}$$

und $(g, f)_{(S)_{-1,q}} =< \tilde{g}, f >_{(S)_{-1,q}}$, $\forall f \in (S)_{-1,q}$. Damit ist auch die Surjektivität gezeigt. □

2.3 Das Wickprodukt

Für zwei Elemente $F = \sum_{\alpha\in\Gamma} a_\alpha M_\alpha$, $G = \sum_{\beta\in\Gamma} b_\beta M_\beta \in (S)_{-1}$ ist das **Wickprodukt** definiert durch

$$F \diamond G := \sum_{\alpha,\beta\in\Gamma} a_\alpha b_\beta M_{\alpha+\beta}. \tag{2.3.1}$$

Lemma 2.3.1 *a) $F, G \in (S)_{-1} \Rightarrow F \diamond G \in (S)_{-1}$.*
b) $f, g \in (S)_1 \Rightarrow f \diamond g \in (S)_1$.

Beweis: Analog zu Lemma 2.4.4 in [11]. □

Bemerkung 2.3.2 *Das Wickprodukt ist kommutativ, assoziativ und distributiv und hängt nicht von der Wahl der Basiselemente des $L^2(\vartheta)$ (hier: $\{M_\gamma|\gamma \in \Gamma\}$) ab (vgl. Kap. 2.4 in [11]).*

Satz 2.3.3 *Seien $F = \sum_{\alpha\in\Gamma} a_\alpha M_\alpha \in (S)_{-1,-s}$ und $G = \sum_{\beta\in\Gamma} b_\beta M_\beta \in (S)_{-1,-r}$ mit $s > r + 1$ und $r, s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\|F \diamond G\|_{(S)_{-1,-s}} \leq c\|F\|_{(S)_{-1,-s}}\|G\|_{(S)_{-1,-r}}, \tag{2.3.2}$$

wobei die Konstante $c > 0$ nur von r und s abhängt.

Beweis: Sei $t := s - r > 1$. Nun gilt

$$F \diamond G = \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta \right) M_\gamma.$$

Sei weiter $f = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma M_\gamma \in (S)_{-1,s}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& | < F \diamond G, f >_{(S)_{-1,q}} | \\
& = | \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta \right) c_\gamma | \\
& = | \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(\sum_{\beta\leq\gamma} a_{\gamma-\beta} b_\beta c_\gamma \right) | \\
& = | \sum_{\beta\in\Gamma} \sum_{\gamma\geq\beta} a_{\gamma-\beta} b_\beta c_\gamma | \\
& = | \sum_{\beta\in\Gamma} b_\beta \sum_{\gamma\geq 0} a_\gamma c_{\gamma+\beta} | \\
& \leq \sum_{\beta\in\Gamma} |b_\beta| \sum_{\gamma\geq 0} \left| a_\gamma (2\mathbb{N})^{\frac{-s\gamma}{2}} c_{\gamma+\beta} (2\mathbb{N})^{\frac{s\gamma}{2}} \right| \\
& \leq \sum_{\beta\in\Gamma} |b_\beta| \left(\sum_{\gamma\geq 0} a_\gamma^2 (2\mathbb{N})^{-s\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\gamma\geq 0} c_{\gamma+\beta}^2 (2\mathbb{N})^{s\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \qquad \text{(Hölder-Ungleichung)} \\
& = \sum_{\beta\in\Gamma} |b_\beta| \left(\sum_{\gamma\geq\beta} c_\gamma^2 (2\mathbb{N})^{(\gamma-\beta)s} \right)^{\frac{1}{2}} \|F\|_{(S)_{-1,-s}} \\
& = \sum_{\beta\in\Gamma} |b_\beta| (2\mathbb{N})^{\frac{-\beta s}{2}} \left(\sum_{\gamma\geq\beta} c_\gamma^2 (2\mathbb{N})^{\gamma s} \right)^{\frac{1}{2}} \|F\|_{(S)_{-1,-s}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \leq \sum_{\beta\in\mathbb{N}} |b_\beta| (2\mathbb{N})^{-\frac{\beta}{2}(s-t)} (2\mathbb{N})^{-\frac{\beta}{2}t} \|f\|_{(S)_{-1,s}} \|F\|_{(S)_{-1,-s}} \\
& \qquad \text{(Hölder-Ungleichung)} \\
& \leq \left(\sum_{\beta\in\Gamma} b_\beta^2 (2\mathbb{N})^{-\beta(s-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\beta\in\Gamma} (2\mathbb{N})^{-\beta t} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{(S)_{-1,s}} \|F\|_{(S)_{-1,-s}}
\end{aligned}
$$

$$
\leq konst. \|G\|_{(S)_{-1,-r}} \|f\|_{(S)_{-1,s}} \|F\|_{(S)_{-1,-s}} \quad \text{(nach Proposition 2.3.3 in [11]).}
$$

□

Korollar 2.3.4 *a) Seien $F \in (S)_{-1,-s}$ und $G \in (S)_{-1,-r}$ mit $s > r+1$ und $r, s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $F \diamond G \in (S)_{-1,-s}$.*
b) Das Wickprodukt ist stetig, d.h. für $F_n \to F$ in $(S)_{-1,-s}$ und $G_n \to G$ in $(S)_{-1,-r}$ bei $n \to \infty$, $s > r+1$ und $r, s \in N_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} F_n \diamond G_n = F \diamond G$$

in $(S)_{-1,-s}$.

$\square$

Bemerkung 2.3.5 *Für $X \in (S)_{-1}$ kann man die Wick-Exponentialfunktion definieren durch:*

$$\exp^{\diamond}[X] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^{\diamond n}. \tag{2.3.3}$$

Diese besitzt die üblichen algebraischen Eigenschaften wie zum Beispiel $\exp^{\diamond}[X+Y] = \exp^{\diamond}[X] \diamond \exp^{\diamond}[Y]$ für $X, Y \in (S)_{-1}$, vgl. auch S.65 in [11].

2.4 Stochastische Integration

Die Verallgemeinerung des Îto-Integrals $\int_0^\infty Y_t\, dB_t$ ist bekanntlich das Skorohod-Integral $\int_0^\infty Y_t\, \delta B_t$. Das Skorohod-Integral gilt auch für antizipierende Integranden (vgl. S. 45ff. in [11]). Im Folgenden seien

$$L^2(\mu) := \{f : \Omega_1 \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int_{\Omega_1} f^2(\omega_1)\, d\mu < \infty\}$$

und

$$L^2(\nu) := \{f : \Omega_2 \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int_{\Omega_2} f^2(\omega_2)\, d\nu < \infty\}.$$

Lemma 2.4.1 *a) Angenommen Y_t ist ein adaptierter stochastischer Prozess auf Ω_1 mit $\int_0^\infty \|Y_t\|_{L^2(\mu)}\, dt < \infty$. Dann gilt*

$$\int_0^\infty Y_t\, \delta B_t = \int_0^\infty Y_t\, dB_t. \tag{2.4.1}$$

b) Angenommen Y_t ist ein adaptierter stochastischer Prozess auf Ω_2 mit $\int_0^\infty \|Y_t\|_{L^2(\nu)}\, dt < \infty$. Dann gilt

$$\int_0^\infty Y_t\, \delta Q_t = \int_0^\infty Y_t\, dQ_t. \tag{2.4.2}$$

Beweis: a) Proposition 2.5.4 in [11].
b) Analog zu a), vgl. auch (2.23) in [10]. □

Der folgende Satz macht die zentrale Bedeutung des Wickprodukts deutlich:

Satz 2.4.2 *a) Angenommen Y_t ist ein Skorohod-integrierbarer stochastischer Prozess auf Ω_1. Dann existiert das Pettis-Integral $\int_0^\infty Y_t \diamond W_t\, dt$ und es gilt*

$$\int_0^\infty Y_t\, \delta B_t = \int_0^\infty Y_t \diamond W_t\, dt. \tag{2.4.3}$$

b) Angenommen Y_t ist ein Skorohod-integrierbarer stochastischer Prozess auf Ω_2. Dann existiert das Pettis-Integral $\int_0^\infty Y_t \diamond V_t\, dt$ und es gilt

$$\int_0^\infty Y_t\, \delta Q_t = \int_0^\infty Y_t \diamond V_t\, dt. \tag{2.4.4}$$

Beweis: a) Theorem 2.5.9 in [11].
b) Analog zu a), vgl. auch (2.24) in [10]. □

Korollar 2.4.3 *Es gilt:*

$$a) \qquad \frac{dB_t}{dt} = W_t \tag{2.4.5}$$

$$b) \qquad \frac{dQ_t}{dt} = V_t \tag{2.4.6}$$

Beweis: a) Folgt aus

$$B_t = \int_0^\infty 1\, dB_t = \int_0^\infty 1\, \delta B_t = \int_0^\infty W_s\, ds$$

(Lemma 2.4.1 und Satz 2.4.2).
b) Analog zu a). □

Lemma 2.4.4 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ kompakt, und $X : M \to (S)_{-1}$ sei stetig. Dann gibt es ein $q \geq 0$, sodass $X : M \to (S)_{-1,-q}$ gilt.*

Beweis: Es reicht zu zeigen:

$$\forall f \in (S)_1,\ a \in M:\ |(X(a))(f)| \leq konst.\|f\|_{(S)_{1,q}}.$$

Nun sei $V(f) := \sup_{a\in M}\{|(X(a))(f)|\}$ für $f \in (S)_1$. Damit gibt es nach Lemma 1.3.1 in [12] ein $q \geq 0$, sodass gilt: $\forall f \in (S)_1 : V(f) \leq konst.\|f\|_{(S)_{1,q}}$. □

Mit Satz 2.4.2 lassen sich stochastische Integrale als klassische Integrale im Kondratiev-Raum auffassen, und somit erfüllt die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX(t,x,\omega) &= (E(X))(t,x,\omega)\,dt + (F(X))(t,x,\omega)\,dB(t,\omega) \\ &\quad +(G(X))(t,x,\omega)\,dQ(t,\omega) \\ \text{mit}\ \ & X(0,x) = f(x),\ D \subset \mathbb{R}^d \text{ kompakt},\ t \in [0,T] \text{ und } x \in D, \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

in $(S)_{-1}$ (E, F, G und f geeignet) auch die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dX(t,x)}{dt} &= (E(X))(t,x) + (F(X))(t,x) \diamond W(t) \\ &\quad +(G(X))(t,x) \diamond V(t) \\ \text{mit } & X(0,x) = f(x). \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Die Differentialgleichung (2.4.8) lässt auch antizipierende Anfangsbedingungen und antizipierende Abbildungen E, F und G zu und hat dann als Lösung einen verallgemeinerten stochastischen Prozess, d.h. eine messbare Abbildung $X : [0,T] \times D \to (S)_{-1}$. Für $X \in C([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1})$ gibt es nach Lemma 2.4.4 ein $q \geq 0$ mit $X \in C([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1,-q})$.

Kapitel 3

Existenz und Eindeutigkeit

Wie in Abschnitt 2.4 gezeigt wurde, kann man klassische stochastische Differentialgleichungen der Form (2.4.7) auch als Differentialgleichungen im Kondratiev-Raum in der Gestalt (2.4.8) auffassen. Der Vorteil ist nun, dass die stochastischen Prozesse nicht mehr adaptiert sein müssen, d.h. sie dürfen auch antizipierend sein. Außerdem lassen sich nun bekannte Methoden aus der Funktionalanalysis anwenden. In diesem Kapitel werden die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen stochastischer parabolischer partieller Differentialgleichungen mit Wiener- und Poissontreibern in $(S)_{-1}$ gezeigt. Mithilfe der Fundamentallösung der entsprechenden deterministischen parabolischen partiellen Differentialgleichung erhalten wir eine äquivalente Integralgleichung in $(S)_{-1}$, sodass man den Banachschen Fixpunktsatz anwenden kann, ohne dass man eine Hermite-Transformation durchführen muss.

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Gesucht wird eine Lösung $U : [0, \infty] \times D \to (S)_{-1}$ der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(t,x) \frac{\partial U(t,x)}{\partial x_i} \\ &+ \tilde{c}(t,x)U(t,x) - \lambda(t,x) \diamond U(t,x) \diamond W(t) - \eta(t,x) \diamond U(t,x) \diamond V(t) - \delta(t,x) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

mit $U(0, .) = \varphi(.) \in C(\overline{D}, (S)_{-1})$, $t \in [0, \infty)$, $x \in D$, $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}, \tilde{c} : [0, \infty) \times \overline{D} \to \mathbb{R}$ und $\lambda, \eta, \delta : [0, \infty) \times \overline{D} \to (S)_{-1}$. Dabei werden die partiellen Ableitungen als Grenzwerte der entsprechenden Differenzenquotienten in $(S)_{-1}$ bezüglich der induktiven Limestopologie verstanden.

Der Differentialoperator L wird definiert durch:

$$LU(t,x) := \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(t,x)\frac{\partial U(t,x)}{\partial x_i} + \tilde{c}(t,x)U(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} \tag{3.1.2}$$

Dann lässt sich die Differentialgleichung (3.1.1) auch schreiben als:

$$LU(t,x) = [\lambda(t,x) \diamond W(t) + \eta(t,x) \diamond V(t)] \diamond U(t,x) + \delta(t,x) \tag{3.1.3}$$

mit $U(0,x) = \varphi(x)$.

Satz 3.1.1 *Angenommen es gilt:*
a) Die Matrix $(\tilde{a}_{ij}(t,x))$ *ist symmetrisch für alle* $(t,x) \in [0,T] \times \overline{D}$.
b) L *ist parabolisch in* $[0,T] \times \overline{D}$, *d.h. die Matrix* $(\tilde{a}_{ij}(t,x))$ *ist positiv definit für alle* $(t,x) \in [0,T] \times \overline{D}$.
c) Die Abbildungen $\tilde{a}_{ij}, \frac{\partial \tilde{a}_{ij}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 \tilde{a}_{ij}}{\partial x_k \partial x_h}, \tilde{b}_i, \frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial x_k}\tilde{b}_i, \tilde{c} : [0,T] \times D \to \mathbb{R}$ *existieren und sind stetig, auf* $[0,T]\times\overline{D}$ *stetig fortsetzbar und Hölder-stetig in* x *(mit Exponent* α*) gleichmäßig bzgl.* t, *d.h.* α *hängt nicht von* t *ab.*
d) Es gibt $A > 0$ *und* $0 < \alpha < 1$, *so daß für alle* (t,x), $(\tilde{t},\tilde{x}) \in [0,T] \times \overline{D}$ *gilt:*
$|\tilde{a}_{ij}(t,x) - \tilde{a}_{ij}(\tilde{t},\tilde{x})| \leq A(|t-\tilde{t}|^{\frac{\alpha}{2}} + |x-\tilde{x}|^{\alpha})$.
e) Sei $f : [0,T] \times \overline{D} \to \mathbb{R}$ *stetig und Hölder-stetig (mit Exponent* α*) in* x *gleichmäßig bzgl.* t.
f) Sei $g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *stetig.*

Dann hat die deterministische parabolische partielle Differentialgleichung

$$Lu(t,x) = f(t,x) \tag{3.1.4}$$

mit $u(0,x) = g(x) =$, $t \in [0,T]$ *und* $x \in D$ *die eindeutige Lösung*

$$u(t,x) = \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)g(\xi)\,d\xi - \int_0^t \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau \tag{3.1.5}$$

mit einer stetigen Fundamentallösung $\Gamma(t,x,\tau,\xi)$ *für* $0 \leq \tau < t \leq T$ *und* $x,\xi \in \overline{D}$.

Beweis: Siehe Kapitel 1 in [7], Theorem 12 und Theorem 16. □

Bemerkung 3.1.2 *a) Der Lösungsbegriff beinhaltet, dass alle Ableitungen (d.h.* $\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial U}{\partial t}$*) stetig sind.*
b) Eine Fundamentallösung $\Gamma(t,x,\tau,\xi)$ *mit* $0 \leq \tau < t \leq T$ *und* $x, \xi \in \overline{D}$ *wird definiert durch die Eigenschaften:*
(i) Für festes $(\tau,\xi) \in [0,T] \times \overline{D}$ *genügt* Γ *als Funktion von* (t,x) *mit* $\tau < t \leq T$ *und* $x \in D$ *der Gleichung* $LU(t,x) = 0$.
(ii) Für jede stetige Funktion $g(x)$ *auf* $\overline{D}$ *gilt für alle* $x \in D$*:*

$$\lim_{t \searrow \tau} \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi) g(\xi)\, d\xi = g(x). \tag{3.1.6}$$

Lemma 3.1.3 *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.1 ist die Fundamentallösung* $\Gamma(t,x,\tau\xi)$ *strikt positiv, und es gilt die Halbgruppen-Eigenschaft für* $0 \leq \tau < s < t \leq T$ *und* $x, \xi \in \overline{D}$*:*

$$\Gamma(t,x,\tau,\xi) = \int_D \Gamma(t,x,s,y)\Gamma(s,y,\tau,\xi)\, dy. \tag{3.1.7}$$

Beweis: Siehe Theorem 3.5 in [8]. □

Satz 3.1.4 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.1.1.*
a) Die Ableitungen $\frac{\partial \Gamma(t,x,\tau,\xi)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 \Gamma(x,t,\tau,\xi)}{\partial x_i\, \partial x_j}$ *und* $\frac{\partial \Gamma(t,x,\tau,\xi)}{\partial t}$ *existieren und sind stetig für* $x, \xi \in D$ *und* $0 < \tau < t \leq T$.
b) Für $(t,x) \in [0,T] \times \overline{D}$ *gilt:*

$$\int_D |\Gamma(t,x,0,\xi)| + |\frac{\partial \Gamma(t,x,0,\xi)}{\partial x_i}| + |\frac{\partial^2 \Gamma(x,t,0,\xi)}{\partial x_i\, \partial x_j}| + |\frac{\partial \Gamma(t,x,0,\xi)}{\partial t}|\, d\xi \leq C_T \tag{3.1.8}$$

und

$$\int_0^t \int_D |\Gamma(t,x,\tau,\xi)| + |\frac{\partial \Gamma(t,x,\tau,\xi)}{\partial x_i}| + |\frac{\partial^2 \Gamma(x,t,\tau,\xi)}{\partial x_i\, \partial x_j}| \\ + |\frac{\partial \Gamma(t,x,\tau,\xi)}{\partial t}|\, d\xi\, d\tau \leq \tilde{C}_T. \tag{3.1.9}$$

Dabei ist $0 < C_T, \tilde{C}_T < \infty$.

Beweis: a) Siehe Kapitel 1 in [7], Seite 20.
b) Siehe (3.31) in [8], Seite 184. □

Lemma 3.1.5 *Es gilt:*
a) $(S)_{-1}$ *ist nuklear.*
b) Jede schwachkonvergente Folge in $(S)_{-1}$ *ist auch starkkonvergent in* $(S)_{-1}$*.*

Beweis: a) Nach Lemma 2.8.2 in [11] ist $(S)_1$ nuklear. Nach Proposition 50.6 in [18] ist deshalb auch $(S)_{-1}$ nuklear.
b) Folgt aus Corollary 1, S.358 und Corollary 3, S.520 in [18], da $(S)_1$ nuklear ist. □

Lemma 3.1.6 *Seien* $Y \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1})$, $X \in C([0,T], (S)_{-1})$ *und* $f \in (S)_1$*. Dann gilt für* $(t,x) \in (0,T) \times D$ *und* $s \in [0,T]$*:*
a) $< LY(t,x), f >= L < Y(t,x), f >$.
b) $< \int_0^s Y(r)\, dr, f >= \int_0^s < Y(r), f > dr$.
Insbesondere existiert jeweils die rechte Seite.

Beweis: a) O.E. sei $n = 1$ und $LY = \frac{\partial Y}{\partial x}$. Nun gilt für $f \in (S)_{+1}$:

$$\begin{aligned}
&< LY(t,x), f > \\
&=< \lim_{h\to 0} \frac{Y(t,x+h) - Y(t,x)}{h}, f > \\
&= \lim_{h\to 0} < \frac{Y(t,x+h) - Y(t,x)}{h}, f > \\
&\quad \text{(aus Stetigkeitsgründen)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[< Y(t,x+h), f > - < Y(t,x), f >] \\
&= L < Y(t,x), f > .
\end{aligned}$$

b) Analog zu a). □

Im Folgenden sind bei Integralen in $(S)_{-1}$ immer Pettis-Integrale gemeint, vgl. [11], Kapitel 2.5.

Satz 3.1.7 *Der Differentialoperator L erfülle die Voraussetzungen von Satz 3.1.1 und seien $\lambda, \eta, \delta \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1})$ und $\varphi \in C^2(\overline{D}, (S)_{-1})$. Dann erfüllt ein $U \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1}$ die Differentialgleichung (3.1.1) in $(S)_{-1}$ genau dann, wenn U die folgende Integralgleichung in $(S)_{-1}$ erfüllt:*

$$\begin{aligned} U(t,x) = \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi - \int_0^t \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)([\lambda(\tau,\xi) \diamond W(\tau) \\ +\eta(\tau,\xi) \diamond V(\tau)] \diamond U(\tau,\xi) + \delta(\tau,\xi))\, d\xi\, d\tau \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

mit der stetigen und reellen Fundamentallösung $\Gamma(t,x,\tau,\xi)$ (aus Satz 3.1.1) für $0 \leq \tau < t \leq T$ und $x, \xi \in \overline{D}$.

Beweis: Im Folgenden sei $F(t,x) := [\lambda(t,x) \diamond W(t) + \eta(t,x) \diamond V(t)] \diamond U(t,x) + \delta(t,x)$. Für $f \in (S)_1$ folgt aus Lemma 3.1.6 und Satz 3.1.1:

$< LU(t,x), f >=< F(t,x), f >$ mit $< U(0,x), f >=< \varphi(x), f >$

$\Leftrightarrow$

$L < U(t,x), f >=< F(t,x), f >$ mit $< U(0,x), f >=< \varphi(x), f >$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} < U(t,x), f >= \textstyle\int_D \Gamma(t,x,0,\xi) < \varphi(\xi), f > d\xi \\ - \textstyle\int_0^t \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi) < F(\tau,\xi), f > d\xi d\tau \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} < U(t,x), f >=< \textstyle\int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi, f > \\ - < \textstyle\int_0^t \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi) F(\tau,\xi)\, d\xi d\tau, f >. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Lemma 3.1.5, b). □

Für $q_1 \leq q_2$ gilt $C^{1,2}([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1,-q_1}) \subseteq C^{1,2}([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1,-q_2})$, da die Topologie von $(S)_{-1,-q_1}$ feiner ist als die Topologie von $(S)_{-1,-q_2}$. Sei nun $\tilde{C}^{1,2}([0,\infty) \times \overline{D}, (S)_{-1}) := \{X \in C^{1,2}([0,\infty) \times \overline{D}, (S)_{-1}) \,|\, \forall T > 0 : \exists q_T \in \mathbb{N} : X|_{[0,T]} \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1,-q_T})\}$.

Satz 3.1.8 *Der Differentialoperator L erfülle die Voraussetzungen von Satz 3.1.1 und seien $\lambda, \eta, \delta \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1,-q_T})$ und $\varphi \in C^2(\overline{D}, (S)_{-1,-q_T})$ mit $q_T \in \mathbb{N}$ für alle $T > 0$. Dann hat die Differentialgleichung (3.1.1) in $\tilde{C}^{1,2}([0,\infty) \times \overline{D}, (S)_{-1})$ genau eine Lösung.*

Beweis: Wegen Satz 3.1.7 reicht es, die Integralgleichung (3.1.10) zu betrachten. Sei $T > 0$ beliebig, aber fest. Wegen Lemma 2.2.4 und Korollar 2.3.4 kann man die Integralgleichung (3.1.10) in $C^{1,2}([0,T] \times \overline{D}, (S)_{-1,-q})$ für ein hinreichend großes $q > 0$ betrachten. Für $t_0 \in [0,T]$ und $c > 0$ mit $t_0 + c \leq T$ sei $Y := C^{1,2}([t_0, t_0 + c] \times \overline{D}, (S)_{-1,-q})$ der Banachraum mit der Norm:

$$\|U\|_{C^{1,2}} := \sup_{(t,x) \in [t_0, t_0+c] \times \overline{D}} \{ \sum_{0 \leq i \leq 1, 0 \leq j,k \leq 2} \| \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial t^i\, \partial x^j\, \partial x^k} U(t,x) \|_{(S)_{-1,-q}} \}.$$

Weiter sei $K : Y \to Y$ mit

$$KU(t,x) := \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_0^t \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)([\lambda(\tau,\xi)\diamond W(\tau) \\ +\eta(\tau,\xi)\diamond V(\tau)]\diamond U(\tau,\xi) + \delta(\tau,\xi))\,d\xi\,d\tau.$$

Aus Satz 2.3.3, Satz 3.1.4 und der Hölder-Ungleichung folgt für $U, \tilde{U} \in Y$:

$$\begin{aligned}\|KU - \tilde{K}U\|_{C^{1,2}} &= \sup_{(t,x)\in[t_0,t_0+c]\times\overline{D}} \| \int_0^t \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi) \\ &\quad \cdot[\lambda(\tau,\xi)\diamond W(\tau) + \eta(\tau,\xi)\diamond V(\tau)]\diamond[U(\tau,\xi) - \tilde{U}(\tau,\xi)]\|_{(S)_{-1,-q}}\,d\xi d\tau \\ &\le c\,konst.\|U - \tilde{U}\|_{C^{1,2}}.\end{aligned}$$

Bei hinreichnend kleinem c ist K eine Kontraktion, d.h. nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat K genau einen Fixpunkt. Es gibt also auf $[t_0, t_0 + c]$ genau eine Lösung der Differentialgleichung (3.1.1). Da c unabhängig von $t_0 \in [0,T]$ so gewählt werden kann, daß K eine Kontraktion ist, erhält man stückweise eine eindeutige Lösung auf ganz $[0,T]$. Da $T > 0$ beliebig war und q beliebig groß gewählt werden durfte, gibt es auch eine eindeutige Lösung auf $[0,\infty)$ in $\tilde{C}^{1,2}([0,\infty)\times\overline{D},(S)_{-1})$. □

Kapitel 4

Regularität

Im Allgemeinen liegt die Lösung der Differentialgleichung (3.1.1) in dem abstrakten Raum $(S)_{-1}$. In diesem Kapitel wird nun untersucht, unter welchen Voraussetzungen die Lösungen in $L^p(\vartheta)$ liegen für ein $p \geq 1$.

4.1 $L^2(\vartheta)$-Lösungen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass verallgemeinerte stochastische Differentialgleichungen der Form (3.1.1) unter bestimmten Voraussetzungen eine antizipierende Lösung in $L^2(\vartheta)$ haben. Dazu wird die Chaos-Entwicklung mittels multipler Itô-Integrale benutzt, welche im Folgenden auf den Fall des kombinierten Gauß-Poisson-White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaßes übertragen wird.

Im Folgenden bezeichne $\hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ die Menge der symmetrischen Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}^n)$. Für $\Psi \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n) \otimes \hat{L}^2(\mathbb{R}^m) \subset L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ wird das multiple Itô-Integral definiert durch:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \Psi \, d(B^{\otimes n} \otimes Q^{\otimes m}) := n!m! \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{r_m} \int_{-\infty}^{r_{m-1}} \cdots \int_{-\infty}^{r_2} \Bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s_n} \int_{-\infty}^{s_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{s_2} \Psi(s_1, \ldots, s_n, r_1, \ldots, r_m) \, dB(s_1) \ldots dB(s_n) \Bigg) dQ(r_1) \ldots dQ(r_m). \tag{4.1.1}$$

Der Zusammenhang zwischen den Chaos-Entwicklungen mit Hermite-Polynomen und multiplen Itô-Integralen ist gegeben durch (vgl. [11], S.26 und S.185):

$$\int_{|\alpha|} \xi^{\hat{\otimes}\alpha} \, dB^{\otimes|\alpha|} = H_\alpha(\omega_1) \tag{4.1.2}$$

und

$$\int_{|\alpha|} \xi^{\hat{\otimes}\beta} \, dQ^{\otimes|\alpha|} = C_\alpha(\omega_2), \tag{4.1.3}$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $\xi^{\hat{\otimes}\alpha} := \xi_1^{\hat{\otimes}\alpha_1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \xi_k^{\hat{\otimes}\alpha_k}$, $\hat{\otimes}$ das symmetrische Tensorprodukt ist, und ξ_n die Hermite-Funktionen sind, vgl. Kapitel 2.2. Außerdem gilt für $\Psi \in \hat{L}(\mathbb{R}^n)$:

$$E[(\int_{\mathbb{R}^n} \Psi \, dB^{\otimes n})^2] = E[(\int_{\mathbb{R}^n} \Psi \, dQ^{\otimes n})^2] = n! \|\Psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.1.4}$$

Satz 4.1.1 *Jedes $f \in L^2(\vartheta)$ hat eine eindeutige Darstellung*

$$f(\omega) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f_{n,m} \, d(B^{\otimes n} \otimes Q^{\otimes m}) \tag{4.1.5}$$

mit $f_{n,m} \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n) \otimes \hat{L}^2(\mathbb{R}^m) \subset L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Außerdem gilt die Isometrie

$$\|f\|^2_{L^2(\vartheta)} = \sum_{n,m=0}^{\infty} n!m! \|f_{n,m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)}. \tag{4.1.6}$$

Beweis: Aus Satz 2.2.1, (4.1.2) und (4.1.3) folgt:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma M_\gamma = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{\substack{\gamma=(\alpha,\beta) \\ |\alpha|=n, |\beta|=m}} c_\gamma M_\gamma \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{\substack{\gamma=(\alpha,\beta) \\ |\alpha|=n, |\beta|=m}} c_\gamma (\int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\hat{\otimes}\alpha} \, dB^{\otimes n})(\int_{\mathbb{R}^m} \xi^{\hat{\otimes}\beta} \, dQ^{\otimes m}) \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} (\sum_{\substack{\gamma=(\alpha,\beta) \\ |\alpha|=n, |\beta|=m}} c_\gamma \xi^{\hat{\otimes}\alpha} \otimes \xi^{\hat{\otimes}\beta}) \, d(B^{\otimes n} \otimes Q^{\otimes m}). \end{aligned}$$

Außerdem folgt (4.1.6) aus (2.2.2) und (4.1.4). □

Für $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichne $sym_{x_1,\ldots,x_n}[\phi]$ die in den x_i symmetrisierte Funktion von ϕ. Für $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ bezeichne $sym_{x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m}[\Psi]$ die in den x_i und in den y_j getrennt symmetrisierte Funktion von Ψ.

Die Definition lautet also:

$$sym_{x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m}[\Psi] := \frac{1}{n!m!}\sum_{\sigma,\tau}\Psi(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_n},y_{\tau_1},\dots,y_{\tau_m}), \qquad (4.1.7)$$

wobei über alle Permutationen σ von $(1,\dots,n)$ und τ von $(1,\dots,m)$ summiert wird. Damit gilt $sym[\Psi] \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n) \otimes \hat{L}^2(\mathbb{R}^m)$.

Lemma 4.1.2 *Sei* $Y(t) = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f_{n,m,t}\, d(B^{\otimes n}\otimes Q^{\otimes m})$ *mit* $f_{n,m,t} \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)\otimes\hat{L}^2(\mathbb{R}^m)$*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} Y(t)\diamond W(t)\,dt \qquad (4.1.8)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^m} sym_{t,s_1,\dots,s_n}[f_{n,m,t}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)]\,d(B^{\otimes(n+1)}\otimes Q^{\otimes m})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} Y(t)\diamond V(t)\,dt \qquad (4.1.9)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{m+1}} sym_{t,r_1,\dots,r_m}[f_{n,m,t}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)]\,d(B^{\otimes n}\otimes Q^{\otimes(m+1)}).\end{aligned}$$

Beweis: Mit (4.1.2) und (4.1.3) läßt sich $Y(t)$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}Y(t) &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f_{n,m,t}\,d(B^{\otimes n}\otimes Q^{\otimes m})\\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\Big(\sum_{\substack{\gamma=(\alpha,\beta)\\|\alpha|=n,|\beta|=m}} c_\gamma(t)\xi^{\hat{\otimes}\alpha}\otimes\xi^{\hat{\otimes}\beta}\Big)d(B^{\otimes n}\otimes Q^{\otimes m}) = \sum_{\substack{\gamma=(\alpha,\beta)\\|\alpha|=n,|\beta|=m}} c_\gamma(t)M_\gamma.\end{aligned}$$

Daraus, aus (4.1.2) und (4.1.3) und Corollary 2.5.8 in [11] folgt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} Y(t)\diamond W(t)\,dt &= \sum_{\substack{\gamma=(\alpha,\beta)\\|\alpha|=n,|\beta|=m}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}} c_\gamma(u)\xi_k(u)\,du\Big)M_{\alpha+\epsilon_k,\beta}\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^m}\sum_{\substack{\gamma=(\alpha,\beta)\\|\alpha|=n,|\beta|=m}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Big(\int_{\mathbb{R}} c_\gamma(u)\xi_k(u)\,du\Big)\xi^{\hat{\otimes}(\alpha+\epsilon_k)}\otimes\xi^{\hat{\otimes}\beta}\Big)\\ &\qquad\qquad d(B^{\otimes(n+1)}\otimes Q^m)\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^m} sym_{t,s_1,\dots,s_n}[\sum_{\substack{\gamma=(\alpha,\beta)\\|\alpha|=n,|\beta|=m}} (\sum_{k=1}^{\infty}(\int_{\mathbb{R}} c_\gamma(u)\xi_k(u)\,du)\xi_k(t))$$

$$\xi^{\hat{\otimes}\alpha}(s_1,\dots,s_n)\otimes\xi^{\hat{\otimes}\beta}(r_1,\dots,r_m)]\,d(B^{\otimes(n+1)}\otimes Q^m)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^m} sym_{t,s_1,\dots,s_n}[\sum_{\substack{\gamma=(\alpha,\beta)\\|\alpha|=n,|\beta|=m}} c_\gamma(t)\xi^{\hat{\otimes}\alpha}\otimes\xi^{\hat{\otimes}\beta}]\,d(B^{\otimes(n+1)}\otimes Q^m)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^m} sym_{t,s_1,\dots,s_n}[f_{n,m,t}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots r_m)]\,d(B^{\otimes(n+1)}\otimes Q^m).$$

Damit ist (4.1.8) gezeigt. (4.1.9) wird analog bewiesen. □

Im Folgenden sollen die Abbildungen λ,η deterministisch sein und nur von t abhängen, d.h. es gelte $\lambda(t,x)=\lambda(t),\ \eta(t,x)=\eta(t)\in\mathbb{R}$.

Für $\Psi:[0,T]\times\overline{D}\to(S)_{-1}$ werden folgende Operatoren definiert:

$$(T\Psi)(t,x) := \int_0^t W(\tau)\diamond(\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\lambda(\tau)\Psi(\tau,\xi)\,d\xi)\,d\tau \tag{4.1.10}$$

und

$$(\tilde{T}\Psi)(t,x) := \int_0^t V(\tau)\diamond(\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\eta(\tau)\Psi(\tau,\xi)\,d\xi)\,d\tau. \tag{4.1.11}$$

Proposition 4.1.3 *Sei* $Y(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\Psi_{n,m,t,x}\,d(B^{\otimes n}\otimes Q^{\otimes m})$ *mit* $\Psi_{n,m,t,x}\in\hat{L}^2(\mathbb{R}^n)\otimes\hat{L}^2(\mathbb{R}^m)$ *für* $(t,x)\in[0,T]\times\overline{D}$. *Dann gilt für* $a,b\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(T^a\tilde{T}^bY)(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n+a}\times\mathbb{R}^{m+b}} & sym_{s_1,\dots,s_{n+a};r_1,\dots,r_{m+b}}[\chi_{[0,t]}(s_{n+a})\lambda(s_{n+a})\\ &\cdot\chi_{[0,s_{n+a}]}(s_{n+a-1})\lambda(s_{n+a-1})\dots\chi_{[0,s_n]}(r_{m+b})\lambda(r_{m+b})\\ &\cdot\chi_{[0,r_{m+b}]}(r_{m+b-1})\eta(r_{m+b-1})\dots\chi_{[0,r_{m+2}]}(r_{m+1})\eta(r_{m+1})\\ &\cdot\int_D\Gamma(t,x,r_{m+1},\xi)\Psi_{n,m,r_{m+1},\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)\,d\xi]\\ &\qquad d(B^{\otimes(n+a)}\otimes Q^{\otimes(m+b)}).\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Außerdem gilt :

$$\|(T^a\tilde{T}^bY)(t,x)\|^2_{L^2(\theta)} \le \frac{(n!m!)^2K_1^{2a+2b}t^{a+b}}{(n+a)!(m+b)!} \tag{4.1.13}$$

$$\cdot\sup_{\tau\in[0,t]}\left\{\|\int_D\Gamma(t,x,\tau,\xi)\Psi_{n,m,\tau,\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)\,d\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)}\right\}$$

mit $K_1:=\sup_{t\in[0,T]}\{|\lambda(t)|+|\eta(t)|\}$.

Beweis: Es wird ein Induktionsbeweis über a, b geführt.
Induktionsanfang:

$$(\tilde{T}\Psi)(t,x) = \int_0^t V(\tau) \diamond (\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\eta(\tau)\Psi(\tau,\xi)\,d\xi)\,d\tau$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1}} sym_{r_1,\dots,r_m,r_{m+1}}[\chi_{[0,T]}(r_{m+1})\eta(r_{m+1})$$
$$\cdot \int_D \Gamma(t,x,r_{m+1},\xi)\Psi_{n,m,r_{m+1},\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)]\,d(B^{\otimes n} \otimes Q^{\otimes(m+1)})$$
(wegen Lemma 4.1.2).

Induktionsschritt:
Angenommen die Aussage gilt für a, b. Nun wird die Aussage für $a+1, b$ gezeigt, analog beweist man den Fall $a, b+1$.

$$(T^{a+1}\tilde{T}^b Y)(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n+a+1} \times \mathbb{R}^{m+b}} sym_{s_1,\dots,s_{n+a},s_{n+a+1}}[\chi_{[0,t]}(s_{n+a+1})\lambda(s_{n+a+1})$$
$$\cdot \int_D \Gamma(t,x,s_{n+a+1},\xi)T^a\tilde{T}^b Y(s_{n+a+1},\xi)\,d\xi]\,d(B^{\otimes(n+a+1)} \otimes Q^{\otimes(m+b)})$$
(wegen Lemma 4.1.2)
$$= \int_{\mathbb{R}^{n+a+1} \times \mathbb{R}^{m+b}} sym_{s_1,\dots,s_{n+a},s_{n+a+1};r_1,\dots,r_m}[\chi_{[0,t]}(s_{n+a+1})\lambda(s_{n+a+1})$$
$$\cdot \chi_{[0,s_{n+a+1}]}(s_{n+a})\lambda(s_{n+a})\chi_{[0,s_{n+a}]}(s_{n+a-1})\lambda(s_{n+a-1})\dots$$
$$\cdot \chi_{[0,s_n]}(r_{m+b})\lambda(r_{m+b})\chi_{[0,r_{m+b}]}(r_{m+b-1})\eta(r_{m+b-1})\dots\chi_{[0,r_{m+2}]}(r_{m+1})\eta(r_{m+1})$$
$$\cdot \int_D \Gamma(t,x,r_{m+1},\xi)\Psi_{n,m,r_{m+1},\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)\,d\xi]$$
$$d(B^{\otimes(n+a+1)} \otimes Q^{\otimes(m+b)})$$
(wegen (3.1.7) und der Induktionsvoraussetzung).

Damit ist (4.1.12) gezeigt.

Nun folgt aus (4.1.12):

$$\|(T^a\tilde{T}^b Y)(t,x)\|^2_{L^2(\theta)} \le$$
$$(n+a)!(m+b)!\|sym_{s_1,\dots,s_{n+a};r_1,\dots,r_{m+b}}[\chi_{[0,t]}(s_{n+a})\lambda(s_{n+a})$$
$$\cdot \chi_{[0,s_{n+a}]}(s_{n+a-1})\lambda(s_{n+a-1})\dots\chi_{[0,s_n]}(r_{m+b})\lambda(r_{m+b})\chi_{[0,r_{m+b}]}(r_{m+b-1})$$
$$\cdot \eta(r_{m+b-1})\dots\chi_{[0,r_{m+2}]}(r_{m+1})\eta(r_{m+1})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b)}$$
$$\cdot \sup_{\tau \in [0,t]} \left\{ \| \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\Psi_{n,m,\tau,\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)\,d\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)} \right\}$$

$$\leq (n+a)!(m+b)!\|\frac{K_1^{a+b}}{(n+1)\dots(n+a)(m+1)\dots(m+b)}\chi_{[0,t]^{a+b}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^a\times\mathbb{R}^b)}$$
$$\cdot \sup_{\tau\in[0,t]}\left\{\|\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\Psi_{n,m,\tau,\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)\,d\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)}\right\}$$
$$= (n+a)!(m+b)!(\frac{n!m!}{(n+a)!(m+b)!})^2 K_1^{2a+2b}t^{a+b}$$
$$\cdot \sup_{\tau\in[0,t]}\left\{\|\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\Psi_{n,m,\tau,\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)\,d\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)}\right\}$$
$$= \frac{(n!m!)^2}{(n+a)!(m+b)!}K_1^{2a+2b}t^{a+b}$$
$$\cdot \sup_{\tau\in[0,t]}\left\{\|\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\Psi_{n,m,\tau,\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_m)\,d\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)}\right\}.$$

□

Die Lösung der Differentialgleichung (3.1.1) mit $\lambda(t,x)=\lambda(t),\ \eta(t,x)=\eta(t)\in\mathbb{R}$ hat nach Satz 3.1.7 die Form:

$$\begin{aligned} U(t,x) \;=\; & \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_0^t\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau \\ & - \int_0^t W(\tau)\diamond(\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\lambda(\tau)U(\tau,\xi)\,d\xi)\,d\tau \\ & - \int_0^t V(\tau)\diamond(\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\eta(\tau)U(\tau,\xi)\,d\xi)\,d\tau. \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Im Folgenden wird $\varphi(x),\delta(t,x)\in L^2(\vartheta)$ für alle $(t,x)\in[0,T]\times\overline{D}$ angenommen mit den Chaos-Entwicklungen:

$$\varphi(x) = \sum_{n,m=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\varphi_{n,m,x}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots r_m)\,d(B^{\otimes n}\otimes Q^{\otimes m}) \tag{4.1.15}$$

und

$$\delta(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\delta_{n,m,t,x}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots r_m)\,d(B^{\otimes n}\otimes Q^{\otimes m}). \tag{4.1.16}$$

Im Folgenden wird diese Abkürzung benutzt:

$$\begin{aligned} g_{n,m,t,x,\tau} := & \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)[\varphi_{n,m,\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots r_m) \\ & +\delta_{n,m,\tau,\xi}(s_1,\dots,s_n,r_1,\dots r_m)]\,d\xi. \end{aligned}$$

Satz 4.1.4 *Es gelte* $\lambda(t,x) = \lambda(t)$, $\eta(t,x) = \eta(t) \in \mathbb{R}$ *und* $\varphi(x), \delta(t,x) \in L^2(\vartheta)$ *für alle* $(t,x) \in [0,T] \times \overline{D}$. *Angenommen es gibt eine* $K_2 > 0$, *sodass für alle* $n, m \in \mathbb{N}_0$ *und alle* $(t,x) \in [0,T] \times \overline{D}$ *gilt:*

$$\sup_{\tau \in [0,T]} \left\{ \|g_{n,m,t,x,\tau}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)} \right\} \leq \frac{K_2^{n+m}}{(n!m!)^2}.$$

Dann hat die stochastische parabolische partielle Differentialgleichung (3.1.1) eine reguläre Lösung $U(t,x) \in L^2(\vartheta)$ *für alle* $(t,x) \in [0,T] \times D$.

Beweis: Sei $K := max\{K_1^2, K_2\}$. Die Lösung (4.1.14) wurde in Satz 3.1.8 durch den Banachschen Fixpunktsatz gewonnen, d.h. die Lösung erhält man durch Iteration der rechten Seite von (4.1.14) mit dem Startwert $U_0(t,x) = \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_0^t \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau$. Es reicht also die Terme der Form $(T^{a_1}\tilde{T}^{b_1} \dots T^{a_h}\tilde{T}^{b_k} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} (\varphi_{n,m,\xi} + \delta_{n,m,\tau,\xi})\, d(B^{\otimes n} \otimes Q^{\otimes m}))(t,x)$ (analog zu Proposition 4.1.3) abzuschätzen und aufzuaddieren. Die Abschätzung (4.1.13) gilt auch für derartige Terme.
Es ergibt sich also mit (4.1.13) und den Voraussetzungen die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|U(t,x)\|_{L^2(\vartheta)} &\leq \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{i,j=0}^{\infty} 2^{i+j} \frac{(n!m!)^2 (Kt)^{i+j}}{(n+i)!(m+j)!} \frac{K^{n+m}}{(n!m!)^2} \\
&\leq \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\tilde{K}^{n+i+m+j}}{(n+i)!(m+j)!} \quad \text{mit } \tilde{K} := 2K(t+1) \\
&\leq \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(n+1)(m+1)\tilde{K}^{n+m}}{n!m!} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\tilde{K}^n}{n!})(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)\tilde{K}^m}{m!}) \\
&\leq (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\tilde{K})^n}{n!})(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\tilde{K})^m}{m!}) = \exp(4\tilde{K}) < \infty.
\end{aligned}$$

Damit ist $U(t,x) \in L^2(\vartheta)$ für alle $(t,x) \in [0,T] \times D$ bewiesen. □

4.2 Eine explizite $L^p(\vartheta)$-Lösung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass Differentialgleichungen der Form (3.1.1) unter bestimmten Bedingungen eine explizite adaptierte Lösung in $L^p(\vartheta)$ besitzen für alle $p \geq 1$. Außerdem erlaubt die Lösung für $\omega \in \Omega$ eine pfadweise Betrachtung, sodass im nächsten Kapitel eine stochastische Kontrolle durchgeführt werden kann. Hier werden also Lösungen $U : [0, \infty) \times D \times \Omega \to \mathbb{R}$ von folgender Differentialgleichung:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(t,x) \frac{\partial U(t,x)}{\partial x_i} \tag{4.2.1}$$
$$+\tilde{c}(t,x)U(t,x) - \lambda(t)U(t,x) \diamond W(t) - \eta(t)U(t,x) \diamond V(t) - \delta(t,x)$$

mit $U(0,x) = \varphi(x)$ ausgerechnet.
Dabei gilt $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $t \in [0,\infty)$, $x \in D$, $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}, \tilde{c}, \delta$: $[0,\infty) \times \overline{D} \to \mathbb{R}$, $\lambda, \eta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}$.
Der Differentialoperator $\mathcal{L}$ wird definiert durch:

$$\mathcal{L}U(t,x) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(t,x) \frac{\partial U(t,x)}{\partial x_i} + \tilde{c}(t,x)U(t,x). \tag{4.2.2}$$

Dann lässt sich die Differentialgleichung (4.2.1) auch schreiben als

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L}U(t,x) - \lambda(t)U(t,x) \diamond W(t) - \eta(t)U(t,x) \diamond V(t) - \delta(t,x) \tag{4.2.3}$$

mit $U(0,x) = \varphi(x)$.
Nun sei für λ und η aus $L^2(\mathbb{R})$:

$$J(t) := \exp^{\diamond}[< \omega_1, \chi_{[0,t]}\lambda >] = \exp^{\diamond}[\int_0^t \lambda(s)\, dB_s] \tag{4.2.4}$$
$$= \exp^{\diamond}[\int_0^t \lambda(s) W(s)\, ds]$$

und

$$K(t) := \exp^{\diamond}[< \omega_2, \chi_{[0,t]}\eta > - \int_0^t \eta(s)\, ds] = \exp^{\diamond}[\int_0^t \eta(s)\, dP_s \tag{4.2.5}$$
$$- \int_0^t \eta(s)\, ds] = \exp^{\diamond}[\int_0^t \eta(s)\, dQ_s] = \exp^{\diamond}[\int_0^t \eta(s) V(s)\, ds].$$

Lemma 4.2.1 *Es gilt für stetige λ und η:*

$$a) \qquad \frac{dJ(t)}{dt} = \lambda(t)W(t) \diamond J(t) \tag{4.2.6}$$

$$b) \qquad \frac{dK(t)}{dt} = \eta(t)V(t) \diamond K(t). \tag{4.2.7}$$

Beweis: a) Aus (4.2.4) folgt

$$\begin{aligned} \frac{J(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\exp^{\diamond}[\int_0^t \lambda(s)W(s)\,ds] &= (\frac{d}{dt}\int_0^t \lambda(s)W(s)\,ds) \diamond J(t) \\ &= \lambda(t)W(t) \diamond J(t). \end{aligned}$$

b) Analog zu a). □

Lemma 4.2.2 *Angenommen $\phi, \psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sind stetig. Weiter sei $\psi > -1$, und sei $\int_0^t (ln(1+\psi(s)))^2\,ds < \infty$ für alle $t > 0$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &\exp^{\diamond}[\int_0^t \phi(s)W(s)\,ds + \int_0^t \psi(s)V(s)\,ds] \\ &= \exp[\int_0^t \phi(s)\,dB_s + \int_0^t \ln(1+\psi(s))\,dP_s - \int_0^t (\frac{1}{2}\phi^2(s) + \psi(s))\,ds]. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Beweis: Es gilt $\exp^{\diamond}[< \omega_1, \phi >] = \exp[< \omega_1, \phi > -\frac{1}{2}\|\phi\|^2]$ und $\exp^{\diamond}[< \omega_2, \psi >] = \exp[< \omega_2, \ln(1+\psi) >]$, vgl. Lemma 2.6.16 in [11] und (2.18) in [10]. Mit (4.2.4), (4.2.5) und der Definition des Wickprodukts folgt die Behauptung, da $\exp^{\diamond}[< \omega_1, \phi >]$ nur von ω_1 und $\exp^{\diamond}[< \omega_2, \psi >]$ nur von ω_2 abhängt. □

Lemma 4.2.3 *Angenommen $\phi, \psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sind stetig. Weiter sei $\psi > -1$, und sei $\int_0^t (ln(1+\psi(s)))^2\,ds < \infty$ für alle $t > 0$. Weiter sei $X \in L^p(\vartheta)$ mit $p > 1$.*
Dann gilt

$$X \diamond \exp^{\diamond}[\int_0^t \phi(s)\,dB_s + \int_0^t \psi(s)\,dQ_s] \in L^q(\vartheta) \tag{4.2.9}$$

für alle $1 \le q < p$, und ω-fast sicher gilt

$$\begin{aligned} &\left(X \diamond \exp^{\diamond}[\int_0^t \phi(s)\,dB_s + \int_0^t \psi(s)\,dQ_s]\right)(\omega_1, \omega_2) \\ &= X(\omega_1 - \phi, \omega_2 - \psi)\exp^{\diamond}[\int_0^t \phi(s)\,dB_s + \int_0^t \psi(s)\,dQ_s](\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Beweis: Siehe Theorem 4.4 in [10], analog zum Beweis von Theorem 2.10.7 in [11]. □

Satz 4.2.4 *Angenommen es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.1.1. Weiter seien $\varphi \in C^2(\overline{D}, \mathbb{R})$, $\delta \in C^{1,2}([0,\infty) \times \overline{D}, \mathbb{R})$ und $\lambda, \eta \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$. Außerdem gelte $\eta > -1$ und $\int_0^t (\ln(1+\eta(s)))^2\, ds < \infty$ für alle $t > 0$. Dann hat die Differentialgleichung (4.2.1) in $\tilde{C}^{1,2}([0,\infty) \times \overline{D}, (S)_{-1})$ eine eindeutige Lösung $U : [0,\infty) \times D \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $U(t,x,\,.\,) \in L^p(\vartheta)$ für alle $(t,x) \in [0,\infty) \times D$ und alle $p \geq 1$. Diese Lösung hat die (ω-punktweise) Form:*

$$
\begin{aligned}
U(t,x,\omega) = \Bigg(& \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi - \int_0^t \exp[\int_0^\tau \frac{1}{2}\lambda^2(s) + \eta(s) \\
& \cdot(1+\ln(1+\eta(s)))\, ds] \exp[\int_0^\tau \lambda(s)\, dB_s(\omega_1)] \exp[\int_0^\tau \ln(1+\eta(s))\, dP_s(\omega_2)] \\
& \cdot \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\, d\xi d\tau \Bigg) \exp[\int_0^t \frac{1}{2}\lambda^2(s) + \eta(s)\, ds] \\
& \cdot \exp[-\int_0^t \lambda(s)\, dB_s(\omega_1)] \exp[-\int_0^t \ln(1+\eta(s))\, dP_s(\omega_2)]. \qquad (4.2.11)
\end{aligned}
$$

mit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

Beweis: Durch die Voraussetzungen hat (4.2.1) in $\tilde{C}^{1,2}([0,\infty) \times \overline{D}, (S)_{-1})$ eine eindeutige Lösung nach Satz 3.1.8. Zunächst wird (4.2.1) als Gleichung in $(S)_{-1}$ aufgefasst, und beide Seiten werden mit $J(t) \diamond K(t)$ Wick-multipliziert. Kleinere Umformungen ergeben dann:

$$
\begin{aligned}
& J(t) \diamond K(t) \diamond \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + (\lambda(t)W(t) \diamond J(t)) \diamond K(t) \diamond U(t,x) \\
& \quad + J(t) \diamond (\eta(t)V(t) \diamond K(t)) \diamond U(t,x) \\
& = J(t) \diamond K(t) \diamond \mathcal{L}U(t,x) - J(t) \diamond K(t)\delta(t,x).
\end{aligned}
$$

Wegen Lemma 4.2.1 ist das äquivalent zu:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(J(t) \diamond K(t) \diamond U(t,x)) &= J(t) \diamond K(t) \diamond \mathcal{L}U(t,x) - J(t) \diamond K(t)\delta(t,x) \\
&= \mathcal{L}(J(t) \diamond K(t) \diamond U(t,x)) - J(t) \diamond K(t)\delta(t,x).
\end{aligned}
$$

Mit $Y(t,x) := J(t) \diamond K(t) \diamond U(t,x)$ ergibt sich:

$$
\frac{\partial Y(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L}Y(t,x) - J(t) \diamond K(t)\delta(t,x) \qquad (4.2.12)
$$

mit $Y(0,x) = \varphi(x)$.

Nun wird (4.2.12) mithilfe von Lemma 4.2.2 ω-punktweise betrachtet:

$$\frac{\partial Y(t,x,\omega)}{\partial t} = \mathcal{L}Y(t,x,\omega) - \exp[-\int_0^t \frac{1}{2}\lambda^2(s) + \eta(s)\,ds] \cdot \exp[\int_0^t \lambda(s)\,dB_s + \int_0^t \ln(1+\eta(s))\,dP_s](\omega)\delta(t,x) \qquad (4.2.13)$$

mit $Y(0,x,\omega) = \varphi(x)$.

Das stochastische Integral $\int_0^t \ln(1-\eta(s))\,dPs(\omega)$ ist ein Càdlàg-Prozess, welcher auf einem endlichen Intervall nur endlich viele Sprungstellen hat. Fast jeder Pfad hat also Sprungzeiten der Form: $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n < \infty$ mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Also wird (4.2.13) jeweils nur auf $[t_n, t_{n+1})$ betrachtet. Wegen Satz 3.1.1, aus Stetigkeitsgründen und wegen der Halbgruppeneigenschaft von Γ (Lemma 3.1.3, vgl. auch den Beweis von Lemma 5.1.3) folgt:

$$Y(t,x,\omega) = \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_0^t \exp[\int_0^\tau -(\frac{1}{2}\lambda^2(s) + \eta(s))\,ds] \cdot \exp[\int_0^\tau \lambda(s)\,dB_s + \int_0^\tau \ln(1+\eta(s))\,dP_s](\omega)\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau. \qquad (4.2.14)$$

Aus Doobs Maximalungleichung (Theorem 1.3.8 in [13]) folgt für alle $T > 0$ und $1 < p < \infty$:

$$\sup_{t\in[0,T]}\{\exp[\int_0^t \lambda(s)\,dB_s\}, \sup_{t\in[0,T]}\{\exp[\int_0^t \ln(1+\eta(s))\,dP_s\} \in L^p(\vartheta).$$

Deshalb und wegen Satz 3.1.4 und (4.2.14) gilt für alle $T > 0$ und $1 < p < \infty$:

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times D}\{|Y(t,x,\omega)| + |\frac{\partial Y(t,x,\omega)}{\partial t}| + |\frac{\partial Y(t,x,\omega)}{\partial x_i}| + |\frac{\partial^2 Y(t,x,\omega)}{\partial x_i \partial x_j}|\} \in L^p(\vartheta). \qquad (4.2.15)$$

Für $f \in (S)_1$ folgt aus (4.2.13):

$$\int_\Omega \frac{\partial Y(t,x,\omega)}{\partial t} f(\omega)\,d\theta(\omega) = \int_\Omega \mathcal{L}Y(t,x,\omega)f(\omega)\,d\theta(\omega) - \exp[-\int_0^t (\frac{1}{2}\lambda^2(s) + \eta(s))\,ds]\exp[\int_0^t \lambda(s)\,dB_s + \int_0^t \ln(1+\eta(s))\,dP_s](\omega)\delta(t,x)f(\omega)\,d\theta(\omega).$$

Zu jedem Zeitpunkt t liegt fast sicher *keine* Sprungstelle vor. Also folgt aus Korollar 16.3 in [1] und (4.2.15):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega Y(t,x,\omega)f(\omega)\,d\theta(\omega) = \mathcal{L}(\int_\Omega Y(t,x,\omega)f(\omega)\,d\theta(\omega))$$
$$-\exp[-\int_0^t (\frac{1}{2}\lambda^2(s)+\eta(s))\,ds]$$
$$\cdot\int_\Omega \exp[\int_0^t \lambda(s)\,dB_s + \int_0^t \ln(1+\eta(s))\,dP_s](\omega)\delta(t,x)f(\omega)\,d\theta(\omega).$$

Somit gilt in $(S)_{-1}$ bezüglich der schwachen Topologie:

$$\frac{\partial}{\partial t}Y(t,x) = \mathcal{L}Y(t,x) - J(t)\diamond K(t)\delta(t,x).$$

Da jede schwachkonvergente Folge in $(S)_{-1}$ auch starkkonvergent in $(S)_{-1}$ ist (Lemma 3.1.5), gilt in $(S)_{-1}$ auch bezüglich der induktiven Limestopologie:

$$\frac{\partial}{\partial t}Y(t,x) = \mathcal{L}Y(t,x) - J(t)\diamond K(t)\delta(t,x).$$

Also ist die eindeutige Lösung von (4.3.12) gegeben durch (4.2.14). Außerdem ist

$$U(t,x) = Y(t,x)\diamond \exp^\diamond[-\int_0^t \lambda(s)\,dB_s]\diamond\exp^\diamond[-\int_0^t \eta(s)\,dQ_s]$$

die eindeutige Lösung von (4.2.1). Somit folgt aus (4.2.15) und Lemma 4.2.3 für fast alle $\omega\in\Omega$:

$$\begin{aligned} U(t,x,\omega) &= Y(t,x,(\omega_1+\chi_{[0,t]}\lambda,\omega_2+\chi_{[0,t]}\eta)) \\ &\quad \cdot\exp^\diamond[-\int_0^t \lambda(s)\,dB_s - \int_0^t \eta(s)\,dQ_s] \quad\in\quad L^p(\vartheta) \end{aligned}$$

für alle $p\geq 1$. Und aus Lemma 4.2.2 folgt dann:

$$U(t,x,\omega) = Y(t,x,(\omega_1+\chi_{[0,t]}\lambda,\omega_2+\chi_{[0,t]}\eta))\exp[-\int_0^t \lambda(s)\,dB_s$$
$$-\int_0^t \ln(1+\eta(s))\,dP_s + \int_0^t(\frac{1}{2}\lambda^2(s)+\eta(s))\,ds]. \tag{4.2.16}$$

Nun gilt für $0\leq s\leq \tau\leq t$:

$$B_s(\omega_1+\chi_{[0,t]}\lambda) = B_s(\omega_1) + <\chi_{[0,t]}\lambda,\chi_{[0,s]}> = B_s(\omega_1)+\int_0^s \lambda(r)\,dr.$$

Daraus folgt:

$$\exp[\int_0^\tau \lambda(s)\,dB_s](\omega_1 + \chi_{[0,t]}\lambda) = \exp[\int_0^\tau \lambda(s)\,dB_s(\omega_1) + \int_0^\tau \lambda^2(s)\,ds]. \tag{4.2.17}$$

Analog erhält man:

$$\begin{aligned} &\exp[\int_0^\tau \ln(1+\eta(s))\,dP_s](\omega_2 + \chi_{[0,t]}\eta) \qquad (4.2.18)\\ &= \exp[\int_0^\tau \ln(1+\eta(s))\,dP_s(\omega_2) + \int_0^\tau \ln(1+\eta(s))\eta(s)\,ds]. \end{aligned}$$

Aus (4.2.16) erhält man mit (4.2.14), (4.2.17) und (4.2.18) nun (4.2.11). □

Kapitel 5

Optimale Impulskontrolle

In diesem Kapitel wird eine optimale Impulskontrolle der expliziten $L^p(\vartheta)$-Lösung aus Abschnitt 4.3 durchgeführt. Zunächst wird der zeitdiskrete Fall behandelt, mit welchem dann die Optimalität einer zeitstetigen Impulskontrolle bewiesen wird.

5.1 Eigenschaften der expliziten $L^p(\vartheta)$-Lösung

In diesem Abschnitt wird die Lösung der Differentialgleichung (4.2.1) untersucht. Nach Satz 4.2.4 hat diese Differentialgleichung die explizite Lösung:

$$\begin{aligned} U(t,x,\omega) &= \left(\int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_0^t g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2) \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau \right) h(t)G^{-1}(t,\omega_1)H^{-1}(t,\omega_2) \quad (5.1.1) \end{aligned}$$

mit $G(t,\omega_1) := \exp[\int_0^t \lambda(s)\,dB_s(\omega_1)]$, $H(t,\omega_2) := \exp[\int_0^t \ln(1+\eta(s))\,dP_s(\omega_2)]$, $g(t) := \exp[\int_0^t \frac{1}{2}\lambda^2(s)+\eta(s)(1+\ln(1+\eta(s)))\,ds]$, $h(t) := \exp[\int_0^t \frac{1}{2}\lambda^2(s)+\eta(s)\,ds]$, $0 < s < t$ und $\omega = (\omega_1,\omega_2)$.

Sei $E := C(\overline{D})$ der Banachraum der stetigen Funktionen auf $\overline{D}$ mit der Supremumsnorm $\|\,.\,\|_\infty$. E ist ein polnischer Raum. Im folgenden wird $U(t,x,\omega)$ als stochastischer Prozess in der Zeitvariablen t mit dem Zustandsraum E aufgefaßt:

$$U_t = U_t(\omega) := U(t,\,.\,,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to E. \qquad (5.1.2)$$

Lemma 5.1.1 *Es gilt:*
a) U_t ist ein Càdlàg-Prozess in E, d.h. U_t ist rechtsstetig und hat endliche linksseitige Limites.
b) U_t ist progressiv-messbar bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, d.h. für alle $t \geq 0$ ist $U : [0,t] \times \Omega \to E$ $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$-messbar.

Beweis: a) Bekanntlich sind G und H Càdlàg-Prozesse in $\mathbb{R}$. Nach Satz 3.1.4 ist Γ stetig für $x, \xi \in D$ und $0 < \tau < t < T$. Deshalb gilt $\sup_{x\in\overline{D},\tau<\tilde{t},t}\{\int_d |\Gamma(t,x,\tau,\xi) - \Gamma(\tilde{t},x,\tau,\xi)|\,d\xi\} \to 0$ für $\tilde{t} \to t$. Damit folgt die Behauptung aus der Darstellung (5.1.1) von U_t.
b) Da U_t rechtsstetig ist, reicht es zu zeigen, dass U_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist, vgl. S.50 in [6]. Nun ist U_t $\mathcal{F}_t$-messbar, da Γ stetig ist und da G und H $\mathcal{F}_t$-messbar sind. □

Lemma 5.1.2 *Der stochastische Prozess U_t ist quasi-linksstetig, d.h. für jede wachsende Folge von $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-Stoppzeiten τ_n mit $\lim_{n\to\infty}\tau_n = \tau < \infty$ f.s. gilt $\lim_{n\to\infty} U_{\tau_n} = U_\tau$ f.s.*

Beweis: Bekanntlich sind die stochastischen Prozesse G und H quasi-linksstetig. Da Γ stetig ist, gilt damit $\lim_{n\to\infty} U(\tau_n, x, \omega) = U(\tau, x, \omega)$ ω-f.s. für jedes $x \in \overline{D}$. Bezeichne $U_t(x)$ den Wert von U_t an der Stelle $x \in \overline{D}$. Da U_t ein Càdlàg-Prozess ist, existiert $\lim_{n\to\infty} U_{\tau_n}$. Dann gilt aber $(\lim_{n\to\infty} U_{\tau_n})(x) = \lim_{n\to\infty} U(\tau_n, x, \,.\,) = U(\tau, x, \,.\,) = U_\tau(x)$. □

Im Folgenden seien für $0 \leq s < t$: $G_s^{-1}(t,\omega_1) := \exp[-\int_s^t \lambda(u)\,dB_u(\omega_1)]$, $H_s^{-1}(t,\omega_2) := \exp[-\int_s^t \ln(1+\eta(u))\,dP_u(\omega_2)]$ und $h_s(t) := \exp[\int_s^t \frac{1}{2}\lambda^2(u) + \eta(u)\,du]$.

Lemma 5.1.3 *Für $U(t,x,\omega)$ aus (5.1.1) und $0 \leq s < t$ gilt:*

$$\begin{aligned} U(t,x,\omega) = &\left(\int_D \Gamma(t,x,s,y)U(s,y)\,dy\right) h_s(t) G_s^{-1}(t,\omega_1) H_s^{-1}(t,\omega_2) \\ &\cdot\left(-\int_s^t g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\right) \\ &\cdot h(t)G^{-1}(t,\omega_1)H^{-1}(t,\omega_2). \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Beweis: Aus Lemma 3.1.3 folgt:

$$
\begin{aligned}
&U(t,x,\omega)\\
&= \Bigg(\int_D \Big(\int_D \Gamma(t,x,s,y)\Gamma(s,y,0,\xi)\,dy\Big)\varphi(\xi)\,d\xi\\
&\quad - \int_0^s g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D\Big(\int_D \Gamma(t,x,s,y)\Gamma(s,y,\tau,\xi)\,dy\Big)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\\
&\quad - \int_s^t g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\Bigg)\\
&\quad\cdot h(t)G^{-1}(t,\omega_1)H^{-1}(t,\omega_2)\\
&= \Bigg(\int_D \Gamma(t,x,s,y)\Bigg(\int_D \Gamma(s,y,0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\\
&\quad - \int_0^s g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D \Gamma(s,y,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\Bigg)\,dy\\
&\quad - \int_s^t g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\Bigg)\\
&\quad\cdot h(t)G^{-1}(t,\omega_1)H^{-1}(t,\omega_2)\\
&= \Bigg(\int_D \Gamma(t,x,s,y)U(s,y)\,dy\Bigg)h_s(t)G_s(t,\omega_1)H_s(t,\omega_2)\\
&\quad - \int_s^t g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\\
&\quad\cdot h(t)G^{-1}(t,\omega_1)H^{-1}(t,\omega_2).
\end{aligned}
$$

□

Für $0 \le s \le t$, $B \in \mathcal{B}(E)$ und $x \in E$ wird folgende zeitinhomogene Übergangsfunktion definiert:

$$P(s,x,t,B) := P(U_t \in B | U_s = x). \tag{5.1.4}$$

Satz 5.1.4 *U_t ist ein starker Markovprozess, d.h. es gilt*

$$E[f(U_{\tau+t})|\mathcal{F}_\tau] = \int_E f(y)\,P(\tau,U_\tau,\tau+t,dy) \tag{5.1.5}$$

für alle $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$-Stoppzeiten τ, $t>0$ und $f \in \mathcal{B}(E)$.

Beweis: Bekanntlich sind G und H starke Markovprozesse. Da alle anderen Terme außer G und H deterministisch sind, sind auch die Einbettungen $t \mapsto \int_0^t g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D \Gamma(t,\,.\,,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau$ und $t \mapsto h(t)G^{-1}(t,\omega_1)$ $\cdot H^{-1}(t,\omega_2)\mathbb{1}_E$ starke Markovprozesse in E. Deshalb ist mit (5.1.1) auch U_t ein starker Markovprozess in E. □

5.2 Optimale zeitdiskrete Impulskontrolle

In diesem Abschnitt wird eine optimale zeitdiskrete Impulskontrolle des stochastischen Prozesses U_t durchgeführt. Dazu wird gezeigt, dass sich der Halbgruppenansatz aus [3], Kapitel 4 übertragen lässt, auch wenn hier der Zustandsraum des stochastischen Prozesses unendlichdimensional ist. Zuerst werden die Voraussetzungen für die Existenz der Lösung einer Kontrollgleichung bewiesen. Diese wird dann benutzt, um eine optimale zeitdiskrete Impulskontrolle zu konstruieren.

Zunächst wird U_t in einen zeithomogenen Prozess übertragen. Für $\varphi \in E$, $s \geq 0$ und $t > 0$ sei dazu:

$$\begin{aligned} U^{s,\varphi}_{s+t}(x,\omega) &:= \left(\int_D \Gamma(s+t,x,s,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right) h_s(s+t)G_s^{-1}(s+t,\omega_1) \\ &\cdot H_s^{-1}(s+t,\omega_2) - \left(\int_s^{s+t} g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\right) \\ &\cdot h(s+t)G^{-1}(s+t,\omega_1)H^{-1}(s+t,\omega_2). \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Sei $\tilde{E} := \mathbb{R}^+ \times E$ mit der Norm $\|z\| := s + \|\varphi\|_\infty$ für $z = (s,\varphi) \in \tilde{E}$. Weiter sei für $z = (s,\varphi) \in \tilde{E}$:

$$Y_t^z := (s+t, U^{s,\varphi}_{s+t}). \tag{5.2.2}$$

Wegen Lemma 5.1.3 und Satz 5.1.4 ist $Y_t = Y_t^z$ ein zeithomogener starker Markovprozess mit Zustandsraum $\tilde{E}$. Für $t \geq 0$, $B \in \mathcal{B}(\tilde{E})$ und $z \in \tilde{E}$ wird folgende zeithomogene Übergangsfunktion definiert:

$$P(z,t,B) := P(Y_t^z \in B). \tag{5.2.3}$$

Weiter sei für $f \in B(\tilde{E})$:

$$(\Phi_t f)(z) := \int_{\tilde{E}} f(y)\,P(z,t,dy). \tag{5.2.4}$$

Somit ist $\{\Phi_t\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(B(\tilde{E}), B(\tilde{E}))$ eine lineare, einparametrige, positive Halbgruppe.
Nun sei $C' := C'(\tilde{E}) := \{f : \tilde{E} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt und stetig}\}$.

Proposition 5.2.1 *Es gilt für alle $t \geq 0$:*

$$\Phi_t : C' \to C'. \tag{5.2.5}$$

Beweis: Sei $f \in C'$ und $d(\epsilon) := \sup_{z,\tilde{z}\in\tilde{E},\|z-\tilde{z}\|\leq\epsilon} |f(z) - f(\tilde{z})|$ für $\epsilon > 0$. Dann gilt für $z = (s,\varphi), \tilde{z} = (\tilde{s},\tilde{\varphi}) \in \tilde{E}$ und $\epsilon > 0$:

$$
\begin{aligned}
&|\Phi_t f(z) - \Phi_t f(\tilde{z})| = |E[f(Y_t^z) - f(Y_t^{\tilde{z}})]| \\
&\leq E[d(\|Y_t^z - Y_t^{\tilde{z}}\|)] \\
&\leq E[d(\epsilon)\mathbb{1}_{\{\|Y_t^z - Y_t^{\tilde{z}}\|\leq\epsilon\}} + 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\{\|Y_t^z - Y_{\tilde{z}}^{\tilde{z}}\|>\epsilon\}}] \\
&\leq d(\epsilon) + 2\|f\|_\infty E[\mathbb{1}_{\{\frac{1}{\epsilon}\|Y_t^z - Y_t^{\tilde{z}}\|>1\}}] \\
&\leq d(\epsilon) + 2\|f\|_\infty E[\frac{1}{\epsilon}\|Y_t^z - Y_t^{\tilde{z}}\|] \\
&= d(\epsilon) + \frac{2}{\epsilon}\|f\|_\infty E[|s-\tilde{s}| \\
&\quad + \sup_{x\in\overline{D}}\{|(\int_D \Gamma(s+t,x,s,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi) h_s(s+t) G_s^{-1}(s+t,\omega_1) H_s^{-1}(s+t,\omega_2) \\
&\quad -(\int_D \Gamma(\tilde{s}+t,x,\tilde{s},\xi)\tilde{\varphi}(\xi)\,d\xi) h_{\tilde{s}}(\tilde{s}+t) G_{\tilde{s}}^{-1}(\tilde{s}+t,\omega_1) H_{\tilde{s}}^{-1}(\tilde{s}+t,\omega_2) \\
&\quad +(\int_s^{s+t} g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D \Gamma(s+t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau) \\
&\quad \cdot h(s+t)G^{-1}(s+t,\omega_1)H^{-1}(s+t,\omega_2) \\
&\quad -(\int_{\tilde{s}}^{\tilde{s}+t} g(\tau)G(\tau,\omega_1)H(\tau,\omega_2)\int_D \Gamma(\tilde{s}+t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau) \\
&\quad \cdot h(\tilde{s}+t)G^{-1}(\tilde{s}+t,\omega_1)H^{-1}(\tilde{s}+t,\omega_2)|\}] \quad \text{(Vgl. (5.2.1))} \\
&\leq d(\epsilon) + \frac{2}{\epsilon}\|f\|_\infty |s-\tilde{s}| C_{s,t}\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\infty \\
&\qquad \text{(mit geeigneter Konstante } C_{s,t}\text{ , wegen Satz 3.1.4).}
\end{aligned}
$$

Damit und wegen $d(\epsilon) \to 0$ für $\epsilon \to 0$ ist $\Phi_t f$ stetig, d.h. $\Phi_t f \in C'$. □

Im Folgenden bezeichne $K \subseteq E$ eine kompakte Menge, und sei $\kappa : \tilde{E}\times K \to \mathbb{R}^+$ stetig und beschränkt mit $\kappa \geq k > 0$.

Satz 5.2.2 *Sei $Mf(z) := \inf_{\zeta\in K}\{\kappa(z,\zeta) + f(z+\zeta)\}$ für $f \in C'$ und $z \in \tilde{E}$. Weiter sei $r > 0$, $h > 0$ und $L_h \in C'$ mit $L_h \geq 0$. Dann hat die Kontrollgleichung*

$$u_h = \min\{Mu_h, L_h + e^{-rh}\Phi_h u_h\} \tag{5.2.6}$$

genau eine Lösung in C'.

Beweis: Es gilt $M : C' \to C'$. Offensichtlich gilt für $f_1 \le f_2$ auch $Mf_1 \le Mf_2$ für $f_1, f_2 \in C'$, d.h. M ist wachsend. Weiter gilt $M((1-\lambda)f_1 + \lambda f_2) \ge (1-\lambda)Mf_1 + \lambda Mf_2$ für $\lambda \in (0,1)$, d.h. M ist konkav. Aus $|Mf_1(z) - Mf_2(z)| \le \sup_{z\in\tilde{E}} |f_1(z) - f_2(z)|$ folgt $\|Mf_1 - Mf_2\| \le \|f_1 - f_2\|$, d.h. M ist Lipschitz-stetig. Aus $\kappa \ge k > 0$ folgt $M(0) \ge k > 0$. Damit und mit Proposition 5.2.1 kann man genau wie im Beweis von Theorem 5.4 in [3] zeigen, dass die Abbildung

$$T_h : C' \to C',\ f \mapsto \min\{Mf, L_h + e^{-rh}\Phi_h f\} \tag{5.2.7}$$

genau einen Fixpunkt u_h hat und dass

$$\lim_{n\to\infty} T_h^n(0) = u_h \text{ in } C' \tag{5.2.8}$$

gilt. Damit ist u_h die eindeutige Lösung von (5.2.6) in C'. □

Nun wird das Konzept einer Impulskontrolle eingeführt. Dazu sei $\mathcal{F}_s^t := \sigma(B_r, P_r, s \le r \le t)$ für $s \le t$.

Definition 5.2.3 *Ein System $W = (\theta_1, \zeta_1; \theta_2, \zeta_2; \dots)$ heißt* **Impulskontrolle** *zum Startpunkt s, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*
a) θ_n ist Stoppzeit bzgl. $\{\mathcal{F}_s^t\}_{t\ge s}$,
b) $\theta_n(\omega) \le \theta_{n+1}(\omega)$ ω-f.s.,
c) ζ_n ist eine $\mathcal{F}_{\theta_n}$-messbare Zufallsvariable,
d) $\zeta_n(\omega) \in K$ ω-f.s.

Das Prinzip einer Impulskontrolle ist, dass zu jedem Stoppzeitpunkt $\theta_n(\omega)$ der Prozess Y_t um $\zeta_n(\omega)$ (Impuls) verschoben wird. Die Adaptiertheit von θ_n und ζ_n bedeutet, dass eine Entscheidung über einen Impuls nur aufgrund der Informationen bis zum Zeitpunkt θ_n gefällt werden kann.

Sei $z = (s, \varphi) \in \tilde{E}$ der Startpunkt des Prozesses $Y_t^z = (s + t, U_{s+t}^{s,\varphi})$. Der kontrollierte Prozess wird rekursiv durch eine Folge von Prozessen definiert:

$$\begin{aligned}
X_{0,t} &:= (s + t, U_{s+t}^{s,\varphi}),\\
X_{1,\theta_1+t} &:= (s + \theta_1 + t, U_{s+\theta_1+t}^{s+\theta_1, X_{0,\theta_1}+\zeta_1}),\\
&\ \vdots\\
X_{n,\theta_n+t} &:= (s + \theta_n + t, U_{s+\theta_n+t}^{s+\theta_n, X_{n-1,\theta_n}+\zeta_n}),
\end{aligned}$$

wobei $X_{n,\theta_n(\omega)+t}(\omega) := X_{n-1,\theta_n(\omega)+t}(\omega)$ für $\theta_n(\omega) = \infty$ sei.

Der eigentliche **kontrollierte Prozess** $X : [0,\infty)\times\Omega \to \tilde{E}$ wird dann definiert durch:

$$X_t^{z,W}(\omega) := X_t(\omega) := X_{n,t}(\omega) \text{ für } t \in [\theta_n(\omega), \theta_{n+1}(\omega)). \tag{5.2.9}$$

Definition 5.2.4 *Eine Impulskontrolle W heißt* **zulässig**, *wenn* $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \infty$ *f.s. gilt.*

Im Folgenden bezeichne $r > 0$ einen konstanten Abzinsungsfaktor. $L \in C'$ kann man als momentane Kosten und $\kappa : \tilde{E} \times K \to \mathbb{R}^+$ als Kosten pro Impuls auffassen.

Definition 5.2.5 *Die* **erwarteten Kosten** $J^z(W)$ *für die zulässige Impulskontrolle W beim Anfangszustand $X_0 = z$ werden definiert durch:*

$$J^z(W) := E[\int_0^\infty e^{-rt} L(X_t)\,dt + \sum_{n=1}^\infty e^{-r\theta_n} \kappa(X_{n-1,\theta_n}, \zeta_n)\chi_{\theta_n<\infty}]. \tag{5.2.10}$$

Nun sei $h > 0$ und $S_h := \{\theta \text{ Stoppzeit bzgl. } \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} \mid \theta \in h\mathbb{N}_0 \vee \theta = \infty\}$. Ein System $W^h = (\theta_1^h, \zeta_1^h; \theta_2^h, \zeta_2^h; \dots)$ heißt **zeitdiskrete Impulskontrolle**, wenn W^h eine Impulskontrolle ist und $\theta_i^h \in S_h$ gilt.

Im Folgenden wird eine optimale zeitdiskrete Impulskontrolle $\hat{W}^h$ konstruiert. Dazu wird die Lösung u_h der Kontrollgleichung (5.2.6) benutzt.

Lemma 5.2.6 *Es existiert eine Borel-messbare Abbildung $\hat{\zeta}^h : \tilde{E} \to K$ mit der Eigenschaft:*

$$\forall z \in C' : \ Mu_h(z) = \kappa(z, \hat{\zeta}^h(z)) + u_h(z + \hat{\zeta}^h(z)). \tag{5.2.11}$$

Beweis: [4], S. 154. □

Die Impulskontrolle $\hat{W}^h = (\hat{\theta}_1^h, \hat{\zeta}_1^h; \hat{\theta}_2^h, \hat{\zeta}_2^h; \dots)$ wird definiert durch:
Im Folgenden gelte $X_t(\omega) = X_t^{z,\hat{W}^h}(\omega)$.

$$\hat{\theta}_1^h := \inf\{hm \mid m \in \mathbb{N}_0, u_h(X_{0,hm}) = Mu_h(X_{0,hm})\}, \tag{5.2.12}$$

$$\hat{\zeta}_1^h := \begin{cases} \hat{\zeta}^h(X_{0,\hat{\theta}_1^h}) & \text{für } \hat{\theta}_1^h < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{\theta}_{n+1}^h := \inf\{hm \geq \hat{\theta}_n^h \mid m \in \mathbb{N}_0, u_h(X_{n,hm}) = Mu_h(X_{n,hm})\}, \tag{5.2.13}$$

$$\hat{\zeta}_{n+1}^h := \begin{cases} \hat{\zeta}^h(X_{n,\hat{\theta}_{n+1}^h}) & \text{für } \hat{\theta}_{n+1}^h < \infty \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Proposition 5.2.7 *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\hat{\theta}_0^h \equiv 0$:*

$$E[e^{-r\hat{\theta}_n^h} u_h(X_{n,\hat{\theta}_n^h})\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}] \tag{5.2.14}$$
$$= E[(\int_{\hat{\theta}_n^h}^{\hat{\theta}_{n+1}^h} e^{-rt} L(X_{n,t})\, dt)\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}] + E[e^{-r\hat{\theta}_{n+1}^h} M u_h(X_{n,\hat{\theta}_{n+1}^h})\chi_{\hat{\theta}_{n+1}^h<\infty}].$$

Beweis: Aus (5.2.6) folgt für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $mh \geq \hat{\theta}_n^h$:

$$u_h(X_{n,mh}) = \min\{Mu_h(X_{n,mh}), \int_0^h e^{-rt}\Phi_t L(X_{n,mh})\, dt + e^{-rh}\Phi_h u_h(X_{n,mh})\}.$$

Daraus folgt mit der Markoveigenschaft (5.1.5):

$$e^{-rmh}u_h(X_{n,mh}) = \min\{e^{-rmh}Mu_h(X_{n,mh}), \tag{5.2.15}$$
$$E[\int_{mh}^{(m+1)h} e^{-rt}L(X_{n,t})\, dt + e^{-r(m+1)h}u_h(X_{n,(m+1)h})|\mathcal{F}_s^{s+mh}]\}.$$

Für $mh < \hat{\theta}_{n+1}^h$ gilt $u_h(X_{n,mh}) < Mu_h(X_{n,mh})$. Damit folgt aus (5.2.15):

$$e^{-rmh}u_h(X_{n,mh})\chi_{mh<\hat{\theta}_{n+1}^h} \leq E[(\int_{mh}^{(m+1)h} e^{-rt}L(X_{n,t})\, dt)\chi_{mh<\hat{\theta}_{n+1}^h}$$
$$+e^{-r(m+1)h}u_h(X_{n,(m+1)h})\chi_{mh<\hat{\theta}_{n+1}^h}|\mathcal{F}_s^{s+mh}]. \tag{5.2.16}$$

Aus (5.2.16) folgt durch Summierung über alle $\hat{\theta}_n^h \leq mh < \hat{\theta}_{n+1}^h$ und Erwartungswertbildung:

$$E[e^{-r\hat{\theta}_n^h} u_h(X_{n,\hat{\theta}_n^h})\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}]$$
$$= E[(\int_{\hat{\theta}_n^h}^{\hat{\theta}_{n+1}^h} e^{-rt} L(X_{n,t})\, dt)\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}] + E[e^{-r\hat{\theta}_{n+1}^h} u_h(X_{n,\hat{\theta}_{n+1}^h})\chi_{\hat{\theta}_{n+1}^h<\infty}]$$
$$= E[(\int_{\hat{\theta}_n^h}^{\hat{\theta}_{n+1}^h} e^{-rt} L(X_{n,t})\, dt)\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}] + E[e^{-r\hat{\theta}_{n+1}^h} M u_h(X_{n,\hat{\theta}_{n+1}^h})\chi_{\hat{\theta}_{n+1}^h<\infty}].$$

□

Satz 5.2.8 *Sei $L_h := \int_0^h e^{-rt}\Phi_t L\, dt$. Mit den oben genannten Definitionen und Annahmen ist $\hat{W}^h$ eine zulässige Impulskontrolle, und es gilt für alle $z \in \tilde{E}$:*

$$u_h(z) = \inf_{W^h} J^z(W^h) = J^z(\hat{W}^h), \tag{5.2.17}$$

wobei das Infinium über alle zulässigen und zeitdiskreten Impulskontrollen W^h genommen wird.

Beweis: Im Folgenden sei $W^h = (\theta_1^h, \zeta_1^h; \theta_2^h, \zeta_2^h; \dots)$ eine beliebige zulässige und zeitdiskrete Impulskontrolle. Aus $u_h = \min\{Mu_h, L_h + e^{rh}\Phi_h u_h\}$ folgt durch Iteration für alle $m \in \mathbb{N}_0$:

$$u_h \leq \int_0^{hm} e^{-rt}\Phi_t L\, dt + e^{-rhm}\Phi_{hm} u_h. \tag{5.2.18}$$

Also ist der Prozess $\int_0^{hm} e^{-rt} L(X_{n,t})\, dt + e^{-rhm} u_h(X_{n,hm})$ ein diskretes Submartingal bzgl. $\{\mathcal{F}_{mh}\}_{m\geq 0}$. Damit folgt aus dem Optional-Sampling-Theorem für alle $n \in N_0$ mit $\theta_0^h \equiv 0$:

$$\begin{aligned} &E[e^{-r\theta_n^h} u_h(X_{n,\theta_n^h})\chi_{\theta_n^h<\infty}] \\ &\leq E[(\int_{\theta_n^h}^{\theta_{n+1}^h} e^{-rt} L(X_{n,t})\, dt)\chi_{\theta_n^h<\infty}] + E[e^{-r\theta_{n+1}^h} u_h(X_{n,\theta_{n+1}^h})\chi_{\theta_{n+1}^h<\infty}]. \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

Aus $u_h = \min\{Mu_h, L_h + e^{-rh}\Phi_h u_h\}$ folgt $u_h \leq Mu_h$, und daraus folgt $u_h(z) \leq \kappa(z,\zeta) + u_h(z+\zeta)$ für alle $z \in \tilde{E}$ und $\zeta \in K$. Also folgt aus (5.2.19):

$$\begin{aligned} &E[e^{-r\theta_n^h} u_h(X_{n,\theta_n^h})\chi_{\theta_n^h<\infty}] \\ &\leq E[(\int_{\theta_n^h}^{\theta_{n+1}^h} e^{-rt} L(X_{n,t})\, dt)\chi_{\theta_n^h<\infty}] \\ &\quad + E[e^{-r\theta_{n+1}^h}\kappa(X_{n,\theta_{n+1}^h}, \zeta_{n+1}^h)\chi_{\theta_{n+1}^h<\infty}] + E[e^{-r\theta_{n+1}^h} u_h(X_{n,\theta_{n+1}^h})\chi_{\theta_{n+1}^h<\infty}]. \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

Aus (5.2.20) ergibt sich durch Iteration:

$$\begin{aligned} u_h &\leq E[\sum_{n=0}^{N-1}(\int_{\theta_n^h}^{\theta_{n+1}^h} e^{-rt} L(X_{n,t})\, dt)\chi_{\theta_n^h<\infty}] \\ &\quad + E[\sum_{n=1}^{N} e^{-r\theta_n^h}\kappa(X_{n-1,\theta_n^h}, \zeta_n^h)\chi_{\theta_n^h<\infty}] + E[e^{-r\theta_N^h} u_h(X_{n,\theta_N^h})\chi_{\theta_N^h<\infty}]. \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Mit $N \to \infty$ folgt aus (5.2.21) für alle $z \in \tilde{E}$:

$$u_h(z) \leq J^z(W^h). \tag{5.2.22}$$

Aus Proposition 5.2.7 folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\hat{\theta}_0^h \equiv 0$:

$$\begin{aligned} &E[e^{-r\hat{\theta}_n^h} u_h(X_{n,\hat{\theta}_n^h})\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}] \\ &= E[(\int_{\hat{\theta}_n^h}^{\hat{\theta}_{n+1}^h} e^{-rt} L(X_{n,t})\, dt)\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}] + E[e^{-r\hat{\theta}_{n+1}^h} Mu_h(X_{n,\hat{\theta}_{n+1}^h})\chi_{\hat{\theta}_{n+1}^h<\infty}] \\ &= E[(\int_{\hat{\theta}_n^h}^{\hat{\theta}_{n+1}^h} e^{-rt} L(X_{n,t})\, dt)\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}] + E[e^{-r\hat{\theta}_{n+1}^h}\kappa(X_{n,\hat{\theta}_{n+1}^h}, \hat{\zeta}^h(X_{n,\hat{\theta}_{n+1}^h})) \\ &\quad \cdot\chi_{\hat{\theta}_{n+1}^h<\infty}] + E[e^{-r\hat{\theta}_{n+1}^h} u_h(X_{n+1,\hat{\theta}_{n+1}^h})\chi_{\hat{\theta}_{n+1}^h<\infty}]. \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

Wie oben folgt aus (5.2.23) durch Iteration:

$$u_h = E[\sum_{n=0}^{N-1}(\int_{\hat{\theta}_n^h}^{\hat{\theta}_{n+1}^h} e^{-rt}L(X_{n,t})\,dt)\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}] \tag{5.2.24}$$
$$+E[\sum_{n=1}^{N} e^{-r\hat{\theta}_n^h}\kappa(X_{n-1,\hat{\theta}_n^h},\hat{\zeta}_n^h)\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty}] + E[e^{-r\hat{\theta}_N^h}u_h(X_{n,\hat{\theta}_N^h})\chi_{\hat{\theta}_N^h<\infty}].$$

Aus (5.2.24) folgt $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-r\hat{\theta}_n^h}\chi_{\hat{\theta}_n^h<\infty} < \infty$, da $\kappa \geq k$, $L \geq 0$ und $u_h \geq 0$ gilt und da u_h beschränkt ist. Also folgt $\hat{\theta}_n^h \to \infty$ f.s., d.h. $\hat{W}^h$ ist zulässig. Damit folgt aus (5.2.24) mit $N \to \infty$:

$$u_h(z) = J^z(\hat{W}^h). \tag{5.2.25}$$

Aus (5.2.22) und (5.2.25) folgt die Behauptung des Satzes, da W^h beliebig war.
□

5.3 Optimale zeitstetige Impulskontrolle

In diesem Abschnitt wird eine optimale zeitstetige Impulskontrolle $\hat{W}$ konstruiert. Da die Halbgruppe $\{\Phi_t\}_{t\geq 0}$ nicht stark stetig ist, kann die Existenz einer optimalen Impulskontrolle nicht mit der Maximallösung einer Quasi-Variationsgleichung wie in [3] gezeigt werden. Hier wird die Optimalität durch den Übergang vom zeitdiskreten zum zeitstetigen Fall nachgewiesen. Dazu wird zunächst die gleichmäßige Konvergenz von u_h gegen die optimale Kostenfunktion gezeigt.

$u : \tilde{E} \to \mathbb{R}$ bezeichne die **optimale Kostenfunktion** bei zeitstetiger Impulskontrolle, d.h. es gilt für alle $z \in \tilde{E}$:

$$u(z) := \inf_W J^z(W), \tag{5.3.1}$$

wobei das Infinium über alle zulässigen und zeitstetigen Impulskontrollen $W = (\theta_1, \zeta_1; \theta_2, \zeta_2; \dots)$ genommen wird.
Der folgende Prozess wird als technisches Hilfsmittel benötigt. Für $\varphi \in E$, $s \geq 0$ und $t > 0$ sei dazu

$$\tilde{U}_{s+t}^{s,\varphi}(x,\omega) := \left(\int_D \Gamma(s+t,x,s,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right) h_s(s+t)$$
$$G_s^{-1}(s+t,\omega_1)H_s^{-1}(s+t,\omega_2). \tag{5.3.2}$$

Damit lässt sich der kontrollierte Prozess $X_t^{z,W}$ mit $z = (s, \varphi) \in \tilde{E}$ auch darstellen durch

$$X_t^{z,W} = (s+t\ ,\ U_{s+t}^{s,\varphi} + \sum_{i=1}^{\max\{n|\theta_n \le t\}} \tilde{U}_{s+t}^{s+\theta_i,\zeta_i}). \tag{5.3.3}$$

Proposition 5.3.1 *Es gilt ω-f.s. für alle $s \geq 0$, $h > 0$, $T > 0$ und $\varphi \in E$:*

$$\lim_{h\to 0} \tilde{U}_{s+h}^{s,\varphi}(\omega) = \varphi \ in\ E \tag{5.3.4}$$

und

$$\lim_{h\to 0} \tilde{U}_{s+t}^{s,\varphi_h}(\omega) = \tilde{U}_{s+t}^{s,\varphi}\ in\ E\ gleichmäßig\ in\ t \in [0, T] \tag{5.3.5}$$

für $\varphi_h \in E$ mit $\lim_{h\to 0} \varphi_h = \varphi$ in E.

Beweis:
a) Aus Theorem 1, S.4 in [7] und (4.30), S.20 in [7] folgt:

$$\sup_{x\in E} | \int_D \Gamma(s+h, x, s, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi - \varphi(x)| \to 0$$

für $h \to 0$. Außerdem gilt $\lim_{h\to 0} h_s(s+h) = \lim_{h\to 0} G_s^{-1}(s+h, \omega_1) = \lim_{h\to 0} H_s^{-1}(s+h, \omega_2) = 1$ f.s. Mit (5.3.2) folgt aus beidem (5.3.4).
b) Aus der Hölder-Ungleichung und Satz 3.1.4 folgt:

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in E} | \int_D \Gamma(s+t, x, s, \xi)(\varphi(\xi) - \varphi_h(\xi))\, d\xi| \\ &\leq \sup_{x\in E} \int_D |\Gamma(s+t, x, s, \xi)|\, d\xi\, \|\varphi - \varphi_h\|_\infty \end{aligned}$$

$\to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $t \in [\epsilon, T]$, da Γ stetig ist (Satz 3.1.1) und $[\epsilon, T] \times \overline{D}$ kompakt ist für alle $\epsilon > 0$. Zusammen mit a) und (5.3.2) folgt daraus (5.3.5). □

Satz 5.3.2 *Für $h \to 0$ gilt $u_h(z) \to u(z)$ gleichmäßig in $z \in \tilde{E}$.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ und zu jeder zeitstetigen Impulskontrolle W eine zeitdiskrete Impulskontrolle W^h gibt mit $|J^z(W) - J^z(W^h)| \leq \epsilon$ für alle $z \in \tilde{E}$. Ohne Einschränkung kann man für die Impulskontrolle $W = (\theta_1, \zeta_1; \theta_2, \zeta_2; \dots)$ annehmen, dass für $T > 0$ ein $N_T \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\max\{n \,|\, \theta_n \leq T\} \geq N_T$ f.s. gilt, denn bei jedem Impuls entstehen Kosten größer/gleich k und die momentanen Kosten L sind beschränkt, sodass es ab einer hinreichend großen Impulszahl auf jeden Fall günstiger wäre, gar keinen Impuls auszuüben. Weiter reicht es zu zeigen, dass für ein hinreichend großes T die absolute Differenz der erwarteten Kosten von $X^{z,W}$ und X^{z,W^h} auf $[0,T]$ beliebig klein wird gleichmäßig in $z \in \tilde{E}$, denn durch die Abzinsung e^{-rt} werden die Kosten auf dem Intervall $[T, \infty]$ beliebig klein.
Nun sei für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\theta_n^h := \begin{cases} mh & \text{für } (m-1)h < \theta_n \leq mh \\ \infty & \text{für } \theta_n = \infty. \end{cases}$$

Damit ist $W^h = (\theta_1^h, \zeta_1; \theta_2^h, \zeta_2; \dots)$ eine zeitdiskrete Impulskontrolle. Für $t = Nh$, $N \in \mathbb{N}$, $h > 0$ und $z = (s, \varphi)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} &\|X_t^{z,W}(\omega) - X_t^{z,W^h}(\omega)\| \\ \leq &\sum_{i=1}^{\max\{n|\theta_n(\omega)\leq t\}} \|\tilde{U}_{s+t}^{s+\theta_i(\omega),\zeta_i(\omega)}(\omega) - \tilde{U}_{s+t}^{s+\theta_i^h(\omega),\zeta_i(\omega)}(\omega)\|_\infty. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Aus Proposition 5.3.1 folgt dann $\|X_t^{z,W}(\omega) - X_t^{z,W^h}(\omega)\| \to 0$ gleichmäßig in $t \in [0,T] \cap M_h$ f.s. für $h \to 0$, wobei $M_h \subseteq [0,T]$ eine Menge mit meas$(M_h) \to 0$ für $h \to 0$ ist. Da L beschränkt ist, folgt damit:

$$\left|\int_0^T e^{-rt} L(X_t^{z,W}(\omega))\, dt - \int_0^T e^{-rt} L(X_t^{z,W^h}(\omega))\, dt\right| \to 0$$

für $h \to 0$ f.s. Weiter folgt aus der Stetigkeit von κ:

$$\sum_{n=1}^{\max\{m|\theta_m(\omega)\leq T\}} |e^{-r\theta_n} \kappa(X_{n-1,\theta_n(\omega)}^{z,W}, \zeta_n(\omega)) - e^{-r\theta_n^h} \kappa(X_{n-1,\theta_n^h(\omega)}^{z,W^h}, \zeta_n(\omega))| \to 0$$

für $h \to 0$ f.s. Alles zusammen ergibt $|J^z(W) - J^z(W^h)| \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $z \in \tilde{E}$ nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz. $\square$

Korollar 5.3.3 *$u : \tilde{E} \to \mathbb{R}$ ist stetig und beschränkt, d.h. $u \in C'$.*

□

Wie in Lemma 5.2.6 existiert eine Borel-messbare Abbildung $\hat{\zeta} : \tilde{E} \to K$ mit der Eigenschaft:

$$\forall z \in C' : \;\; Mu(z) = \kappa(z, \hat{\zeta}(z)) + u(z + \hat{\zeta}(z)). \tag{5.3.7}$$

Die Impulskontrolle $\hat{W} = (\hat{\theta}_1, \hat{\zeta}_1; \hat{\theta}_2, \hat{\zeta}_2; \dots)$ wird definiert durch:
Im Folgenden gelte $X_t(\omega) = X_t^{z,\hat{W}}(\omega)$.

$$\hat{\theta}_1 := \inf\{t \geq 0 \mid u(X_{0,t}) = Mu(X_{0,t})\}, \tag{5.3.8}$$

$$\hat{\zeta}_1 := \begin{cases} \hat{\zeta}(X_{0,\hat{\theta}_1}) & \text{für } \hat{\theta}_1 < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{\theta}_{n+1} := \inf\{t \geq \hat{\theta}_n \mid u(X_{n,t}) = Mu(X_{n,t})\}, \tag{5.3.9}$$

$$\hat{\zeta}_{n+1} := \begin{cases} \hat{\zeta}(X_{n,\hat{\theta}_{n+1}}) & \text{für } \hat{\theta}_{n+1} < \infty \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Proposition 5.3.4 *Sei $\theta := \inf\{t \geq 0 \mid u(Y_t) = Mu(Y_t)\}$ und $z = (s, \varphi) \in \tilde{E}$. Dann gilt:*

$$\forall z \in \tilde{E} : \;\; u(z) = E^z\Big[\int_0^\theta e^{-rt} L(Y_t)\, dt + e^{-r\theta} Mu(Y_\theta)\chi_{\theta<\infty}\Big]. \tag{5.3.10}$$

Beweis: Weiter sei $\theta^h := \inf\{hm \mid m \in \mathbb{N}_0, u_h(Y_{hm}) = Mu(Y_{hm})\}$. Aus (5.2.6) folgt $u_h(z) \leq Mu_h(z)$ für alle $z \in \tilde{E}$. Wegen Satz 5.3.2 folgt mit $h \to 0$:

$$\forall z \in \tilde{E} : \;\; u(z) \leq Mu(z). \tag{5.3.11}$$

Weiter sei $\delta > 0$, $\theta_\delta := \inf\{t \geq 0 \mid u(Y_t) \geq Mu(Y_t) - \delta\}$ und $\tau := \lim_{\delta \to 0} \theta_\delta$. Offensichtlich gilt $\theta_\delta \uparrow \tau$ für $\delta \to 0$ und $\tau \leq \theta$ f.s. Aus der Rechtsstetigkeit von Y_t folgt $u(Y_{\theta_\delta}) \geq Mu(Y_{\theta_\delta}) - \delta$ f.s. und daraus folgt mit der Quasi-Linksstetigkeit $u(Y_\tau) \geq Mu(Y_\tau)$ f.s. Wegen (5.3.11) folgt $u(Y_\tau) = Mu(Y_\tau)$ und zusammen ergibt sich $\tau = \theta$, d.h.

$$\lim_{\delta \to 0} \theta_\delta \uparrow \theta \text{ f.s.} \tag{5.3.12}$$

Weiter sei

$$\theta_\delta^h := \begin{cases} mh & \text{für } (m-1)h < \theta_\delta \le mh \\ \infty & \text{für } \theta_\delta = \infty \end{cases}$$

und sei $\sigma^h := \theta^h \wedge \theta_\delta^h$. Aus der Markoveigenschaft, Satz 5.2.8 und $\sigma \le \theta^h$ folgt:

$$u_h(z) = E^z[\int_0^{\sigma^h} e^{-rt} L(Y_t)\, dt + e^{-r\sigma^h} u_h(Y_{\sigma^h}) \chi_{\sigma^h < \infty}]. \tag{5.3.13}$$

Wegen Satz 5.3.2 und da M stetig ist, gilt für hinreichend kleines h und für alle $z \in \tilde{E}$ $|u_h(z) - u(z)| \le \frac{\delta}{2}$ und $|Mu_h(z) - Mu(z)| \le \frac{\delta}{2}$ und damit $\theta^h \ge \theta_\delta^h$ für hinreichend kleines h f.s. Daraus folgt $\sigma^h \downarrow \theta_\delta$ f.s. für $h \to 0$. Somit folgt aus Satz 5.3.2, (5.3.13), der Beschränktheit von u_h, u und L mit der Rechtsstetigkeit von Y_t und dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$u(z) = E^z[\int_0^{\theta_\delta} e^{-rt} L(Y_t)\, dt + e^{-r\theta_\delta} u(Y_{\theta_\delta}) \chi_{\theta_\delta < \infty}]. \tag{5.3.14}$$

Aus der Definition von θ_δ und der Rechtsstetigkeit von Y_t folgt:

$$\begin{aligned} & E^z[\int_0^{\theta_\delta} e^{-rt} L(Y_t)\, dt + e^{-r\theta_\delta} u(Y_{\theta_\delta}) \chi_{\theta_\delta < \infty}] \\ & \ge E^z[\int_0^{\theta_\delta} e^{-rt} L(Y_t)\, dt + e^{-r\theta_\delta} (Mu(Y_{\theta_\delta}) \chi_{\theta_\delta < \infty} - \delta)]. \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Aus der Quasi-Linkstetigkeit von Y_t, (5.3.12), der Beschränktheit von L und Mu und dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \to 0} E^z[\int_0^{\theta_\delta} e^{-rt} L(Y_t)\, dt + e^{-r\theta_\delta} (Mu(Y_{\theta_\delta}) \chi_{\theta_\delta < \infty} - \delta)] \\ & = E^z[\int_0^{\theta} e^{-rt} L(Y_t)\, dt + e^{-r\theta} Mu(Y_\theta) \chi_{\theta < \infty}]. \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Aus (5.3.14), (5.3.15) und (5.3.16) folgt:

$$u(z) \ge E^z[\int_0^{\theta} e^{-rt} L(Y_t)\, dt + e^{-r\theta} Mu(Y_\theta) \chi_{\theta < \infty}]. \tag{5.3.17}$$

Aus der starken Markoveigenschaft (Satz 5.1.4) und der Definition von u folgt aber für alle zeitstetigen Stoppzeiten ψ:

$$u(z) \le E^z[\int_0^{\psi} e^{-rt} L(Y_t)\, dt + e^{-r\psi} Mu(Y_\psi) \chi_{\psi < \infty}]. \tag{5.3.18}$$

Aus (5.3.17) und (5.3.18) folgt (5.3.10). $\square$

Satz 5.3.5 *Mit den oben genannten Definitionen und Annahmen ist $\hat{W}$ eine zulässige Impulskontrolle, und es gilt für alle $z \in \tilde{E}$:*

$$u(z) = J^z(\hat{W}), \tag{5.3.19}$$

d.h. $\hat{W}$ ist eine optimale zeitstetige Impulskontrolle.

Beweis: Aus (5.3.10), (5.3.8), der Definition von M und der starken Markoveigenschaft (Satz 5.1.4) folgt:

$$u(z) = E[\int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-rt} L(X_t)\, dt + e^{-r\hat{\theta}_1} \kappa(X_{0,\hat{\theta}_1}, \hat{\zeta}_1) \chi_{\hat{\theta}_1 < \infty} \\ + e^{-r\hat{\theta}_1} u(X_{1,\hat{\theta}_1}) \chi_{\hat{\theta}_1 < \infty}]$$

und durch Iteration erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$u(z) = E[\int_0^{\hat{\theta}_n} e^{-rt} L(X_t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} e^{-r\hat{\theta}_i} \kappa(X_{i-1,\hat{\theta}_i}, \hat{\zeta}_i) \chi_{\hat{\theta}_i < \infty} \\ + e^{-r\hat{\theta}_n} u(X_{n,\hat{\theta}_n}) \chi_{\hat{\theta}_n < \infty}]. \tag{5.3.20}$$

Aus (5.3.20) folgt $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-r\hat{\theta}_n} \chi_{\hat{\theta}_n < \infty} < \infty$, da $\kappa \geq k$, $L \geq 0$ und $u \geq 0$ gilt und da u beschränkt ist. Also folgt $\hat{\theta}_n \to \infty$ f.s., d.h. $\hat{W}$ ist zulässig. Aus der Zulässigkeit von $\hat{W}$, der Gleichung (5.3.20) und der Beschränktheit von u folgt:

$$E[\int_0^{\hat{\theta}_n} e^{-rt} L(X_t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} e^{-r\hat{\theta}_i} \kappa(X_{i-1,\hat{\theta}_i}, \hat{\zeta}_i) \chi_{\hat{\theta}_i < \infty} + e^{-r\hat{\theta}_n} u(X_{n,\hat{\theta}_n}) \chi_{\hat{\theta}_n < \infty}]$$

$\to J^z(\hat{W})$ für $n \to \infty$. Damit ist alles gezeigt. □

Kapitel 6

Ein Beispiel

In diesem Kapitel wird ein konkretes Beispiel für die Differentialgleichung (4.2.1) angegeben, welches die Voraussetzungen von Satz 4.2.4 erfüllt. Außerdem wird ein denkbares Impulskontroll-Modell vorgestellt. Danach wird noch gezeigt, wie man die optimale zeitdiskrete Kostenfunktion u_h - und damit die optimale zeitstetige Kostenfunktion u - durch ein Iterationsverfahren approximieren kann. Schließlich wird noch ein simulierter Pfad des stochastischen Prozesses U_t dargestellt.

Es wird angenommen, dass die Koeffizienten des parabolischen Differentialoperators und der White-Noise-Prozesse konstant bzw. Null sind: $\tilde{a}_{ij}(t,x) \equiv \tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i(t,x) \equiv 0$, $\tilde{c}(t,x) \equiv 0$, $\lambda(t) \equiv \lambda$ und $\eta(t) \equiv \eta$. Dann sieht die parabolische partielle Differentialgleichung (4.2.1) wie folgt aus:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x_i \, \partial x_j} - \lambda U(t,x) \diamond W(t) - \eta U(t,x) \diamond V(t) - \delta(t,x) \tag{6.1.1}$$

mit $U(0,x) = \varphi(x)$.
Weiter sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $t \in [0,\infty)$, $x \in D$, $\tilde{a}_{ij}, \lambda, \eta \in \mathbb{R}$, $\eta > -1$, $\varphi \in C^2(\overline{D},\mathbb{R})$ und $\delta \in C^{1,2}([0,\infty) \times \overline{D},\mathbb{R})$. Ferner gebe es ein $l > 0$ mit: $\sum_{i,j=1}^{d} \tilde{a}_{i,j} y_i y_j \geq l|y|^2$, $\forall y \in \mathbb{R}^d$. Sei (a^{ij}) die inverse Matrix von A.
Dann ist nach [8], S.169 die zugehörige Fundamentallösung:

$$\Gamma(t,x,\tau,\xi) = (4\pi(t-\tau))^{-\frac{d}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(t-\tau)}]. \tag{6.1.2}$$

Nach Satz 4.2.4 lautet dann die Lösung von (6.1.1):

$$\begin{aligned} U(t,x,\omega) = \Big(\int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_0^t \exp[(\frac{1}{2}\lambda^2 + \eta + \eta\ln(1+\eta))\tau \\ +\lambda B_\tau(\omega_1) + \ln(1+\eta)P_\tau(\omega_2)] \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)\delta(\tau,\xi)\,d\xi d\tau \Big) \\ \cdot \exp[(\frac{1}{2}\lambda^2 + \eta)t - \lambda B_t(\omega_1) - \ln(1+\eta)P_t(\omega_2)] \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

mit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

Ein denkbares Impulskontroll-Modell könnte wie folgt aussehen. Die Menge K der möglichen Impulse sei endlich, d.h. $K := \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$, und die Kosten pro Impuls seien $\kappa(z,\zeta_i) := k + \tilde{k}\|\zeta_i\|_{L^1(\overline{D})}$ mit $k, \tilde{k} > 0$. Weiter sei $r > 0$ der Abzinsungsfaktor, und die momentanen Kosten L könnten lauten: $L(z) = L(s,\varphi) := L(\varphi) := \min\{B\|\varphi\|_{L^1(\overline{D})}, \tilde{B}\}$ mit $z = (s,\varphi) \in \tilde{E}$ und $B, \tilde{B} > 0$. Dieses Modell erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.2.8 und deshalb liefert (5.2.8) folgendes Iterationsverfahren zur approximativen Berechnung von u_h:

$$\begin{aligned} u_h^{(0)} &\equiv 0 \\ u_h^{(1)}(z) &:= \min\{Mu_h^{(0)}(z), L_h(z)\} \\ u_h^{(2)}(z) &:= \min\{Mu_h^{(1)}(z), L_h(z) + e^{-rh}\Phi_h u_h^{(1)}(z)\} \\ u_h^{(3)}(z) &:= \min\{Mu_h^{(2)}(z), L_h(z) + e^{-rh}\Phi_h u_h^{(2)}(z)\} \\ &\vdots \\ u_h^{(m+1)}(z) &:= \min\{Mu_h^{(m)}(z), L_h(z) + e^{-rh}\Phi_h u_h^{(m)}(z)\}, \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

wobei $L_h = \int_0^h e^{-rt}\Phi_t L\,dt$ gilt. Wegen Satz 5.3.2 gilt $u_h(z) \to u(z)$ gleichmäßig in $z \in \tilde{E}$ für $h \to 0$, d.h. mit dem Iterationsverfahren (6.1.4) kann man auch u approximativ berechnen. Aus Stetigkeits- und Beschränktheitsgründen kann man die einzelnen $u_h^{(m)}(z)$ $(z \in \tilde{E})$ auf jeden Fall näherungsweise ausrechnen, indem man die stochastischen Prozesse $B_t(\omega)$ und $P_t(\omega)$ in der Zeit t diskretisiert und sie auf einen endlichen Zustandsraum beschränkt. Dann nämlich wird aus $\Phi_t f(z)$ $(f \in C')$ eine endliche Summe und um $u_h^{(m)}(z)$ für ein bestimmtes $z \in \tilde{E}$ nach dem Iterationsverfahren näherungsweise auszurechnen, muss man nur $u_h^{(m-1)}(z)$ für endlich viele $z \in \tilde{E}$ ausrechnen usw. Man kann auch die Monte-Carlo-Methode benutzen.

Zum Abschluss wird noch ein simulierter Pfad des stochastischen Prozesses U_t dargestellt für den einfachen Fall $d = 1$, $D = (0, 2.5\pi)$, $(a_{ij}) = a = 50$, $\varphi(x) = \sin(x)$, $\delta \equiv 0$, $\lambda = 0.4$, $\eta = 2$, und der Parameter des Poissonprozesses beträgt 1.5. Dabei erkennt man die Sprünge des Poissonprozesses und den Einfluss der Brownschen Bewegung.

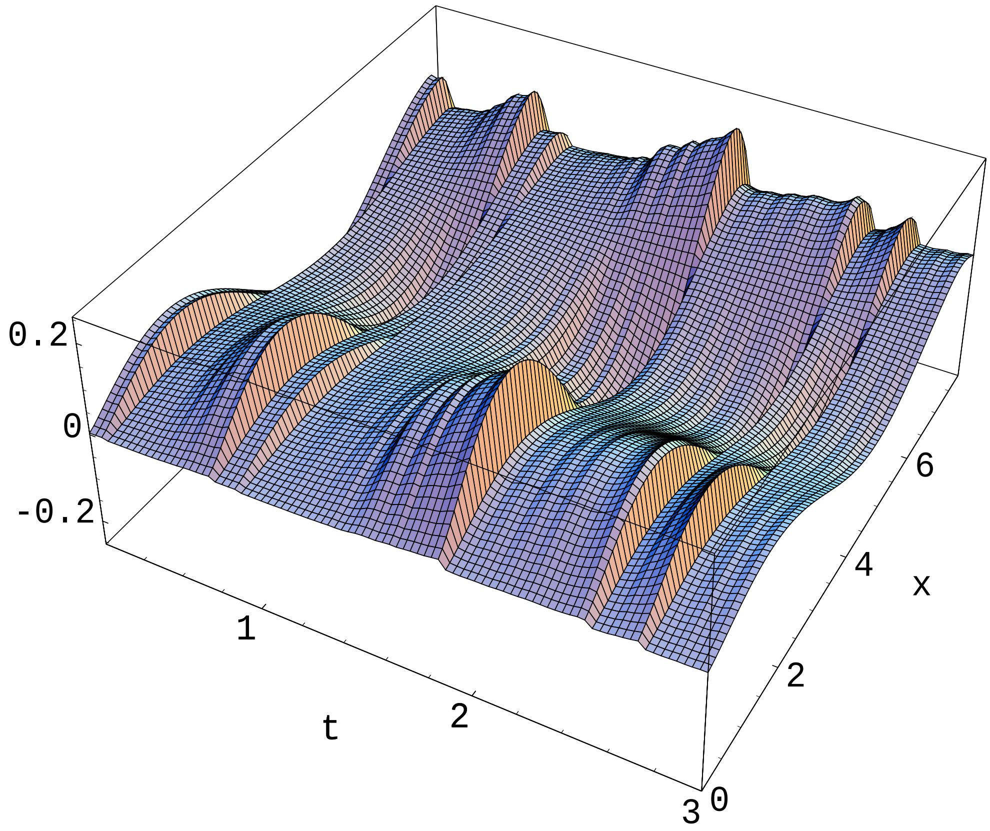

Abbildung 6.1: $U(t, x, \omega)$

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird zunächst die Existenz und Eindeutigkeit von stochastischen parabolischen partiellen Differentialgleichungen in dem Kondratiev-Raum $(S)_{-1}$ der stochastischen Distributionen gezeigt. Danach wird bewiesen, dass unter bestimmten Voraussetzungen diese Lösungen in $L^2(\vartheta)$ liegen. Unter weiteren Annahmen wird eine explizite Lösung in $L^p(\vartheta)$ mit $p \geq 1$ ausgerechnet. In diesem Zusammenhang wäre es noch interessant herauszufinden, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen man im Allgemeinen reguläre Lösungen erhält. Man könnte auch noch die singulären White-Noise-Prozesse W_t und V_t durch die geglätteten White-Noise-Prozesse W_{ϕ_t} und V_{ϕ_t} ersetzen und untersuchen, wie weit man die Voraussetzungen für die Regularität dadurch abschwächen kann.

Im zweiten Teil wird eine optimale zeitdiskrete und eine optimale zeitstetige Impulskontrolle für die explizite Lösung konstruiert. Hier schließt sich die Frage an nach einer allgemeinen Impulskontroll-Theorie in unendlichdimensionalen Räumen. Außerdem existiert bisher auch noch keine Kontrolltheorie für verallgemeinerte stochastische Prozesse in Kondratiev-Räumen. Dazu müsste man allerdings erst klären, wie man reale Beobachtungen als stochastische Distributionen interpretiert, welche Optimalitätskriterien geeignet sind und wie ein Impuls das Modell beeinflusst.

Schließlich muss man für die praktische Durchführung einer Impulskontrolle noch die optimalen Kostenfunktionen u_h bzw. u ausrechnen. Dazu kann das Iterationsverfahren aus Kapitel 6 benutzt werden, oder man entwickelt ein anderes numerisches Verfahren zur Approximation von u_h und damit von u.

Notation

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\mathbb{R})$
Schwartz-Raum der schnell fallenden, glatten, reellen Funktionen auf $\mathbb{R}$

$\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}'(\mathbb{R})$
Raum der temperierten Distributionen

$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{S}')$
σ-Algebra der Borelschen Mengen

$\boldsymbol{\mu}$
Gauß-White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß

$\boldsymbol{\nu}$
Poisson-White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß

$\boldsymbol{\vartheta := \mu \times \nu}$
kombiniertes Gauß-Poisson-White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß

$\boldsymbol{B_t(\omega)}$
Brownsche Bewegung

$\boldsymbol{P_t(\omega)}$
Poisson-Prozess

$\boldsymbol{Q_t(\omega) = P_t(\omega) - t}$
kompensierter Poisson-Prozess

$\boldsymbol{\{\mathcal{F}\}_{t \geq 0}}$
durch $B_t(\omega)$ und $P_t(\omega)$ erzeugte Filtration

$\boldsymbol{\xi_n(x)}$
Hermite-Funktionen

$\boldsymbol{H_\alpha(\omega_1)}$
stochastische Hermite-Polynome

$\boldsymbol{C_\alpha(\omega_2)}$
Chalier-Polynome

$\otimes$
vervollständigtes Tensorprodukt zweier separabler Hilberträume

$\boldsymbol{(S)_{\rho,q}}$
Kondratiev-Hilberträume

$\boldsymbol{(S)_{\rho}}$
Kondratiev-Raum der stochastischen Testfunktionen

$\boldsymbol{(S)_{-\rho}}$
Raum der stochastischen Distributionen

$\boldsymbol{W_t}$
singulärer Gauß-White-Noise-Prozess

$\boldsymbol{V_t}$
singulärer kompensierter Poisson-White-Noise-Prozess

$\diamond$
Wickprodukt

$\boldsymbol{\Gamma(t, x, \tau, \xi)}$
Fundamentallösung zu einem parabolischen Differentialoperator

$\boldsymbol{\hat{L}^2}(\mathbb{R}^n)$
Menge der symmetrischen Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}^n)$

$\boldsymbol{sym}[\Psi]$
Symmetrisierung von $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$\boldsymbol{\tau, \tau_n, \theta, \theta_n}$
Stoppzeiten

$\boldsymbol{P(z, t, B)}$
zeithomogene Übergangsfunktion

$\boldsymbol{\{\Phi_t\}_{t\geq 0}}$
Markov-Halbgruppe

$\boldsymbol{\zeta_n}$
Impulse

$\boldsymbol{W = (\theta_1, \zeta_1; \theta_2, \zeta_2; \dots)}$
Impulskontrolle

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie*, 2.Auflage, de Gruyter Lehrbuch, Berlin, 1992

[2] Bensoussan, A.: *Stochastic Control by Functional Analysis Methods*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982

[3] Bensoussan, A., Lions, J.-L.: *Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities*, Gauthier-Villars, Paris, 1982

[4] Bertsekas, D.P., Shreve, S.E.: *Stochastic optimal control: The discrete time case*, Academic Press, New York, 1978

[5] Chow, P.-L.: Generalized Solution of Some Parabolic Equations with a Random Drift, *Applied Mathematics and Optimization*, **20** (1989)

[6] Ethier, S. N., Kurtz, T. G.: *Markov Processes, Characterization and Convergence*, John Wiley & Sons, New York, 1986

[7] Friedman, A.: *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Krieger Publishing Company, Malabar, 1983

[8] Garroni, M. G., Menaldi, J. L.: *Green functions for second order parabolic integro-differential problems*, Pitman Research Notes in Mathematics, 275, New York, 1992

[9] Hille, E., Phillips, R.S.: *Functional Analysis and Semigroups*, American Mathematical Society Colloquium Publications 31, Providence, 1957

[10] Holden, H., Øksendal, B.: A White Noise Approach to Stochastic Differential Equations Driven by Wiener and Poisson Processes, *Preprint Series - Matematisk institutt, Universitetet i Oslo*, **46** (1995)

[11] Holden, H., Øksendal, B. Ubøe, J., Zhang, T.: *Stochastic Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 1996

[12] Kallianpur, G., Xiong, J.: *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces*, IMS Lecture Notes - Monograph Series, Volume 26, Hayward, 1995

[13] Karatzas, I., Shreve, S. E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1991

[14] Nualart, D., Zakai, M.: Generalized Brownian Functionals and the Solution to a Stochastic Partial Differential Equation, *Journal of Functional Analysis*, **46** (1989)

[15] Protter, P.: *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1990

[16] Reed, M., Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1980

[17] Rudin, W.: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1991

[18] Treves, F.: *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967

Lebenslauf

11.01.1973	Geboren in Peine
1979-1983	Grundschule in Hohenhameln
1983-1985	Orientierungsstufe St. Augustinusschule in Hildesheim
1985-1992	Bischöfliches Gymnasium Josephinum in Hildesheim
Juli 1992 - Juni 1993	Grundwehrdienst in Budel (NL) und Hannover
Oktober 1993	Beginn des Mathematikstudiums an der Georg-August-Universität Göttingen
Oktober 1995	Diplomvorprüfung
April 1997 - September 1997	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut, Universität Göttingen
Juli 1998	Diplomprüfung in Mathematik
seit August 1998	Promotionsstudium bei Prof. Dr. H. Hering am Institut für Mathematische Stochastik, Universität Göttingen
September 1998 - Januar 1999	Auslandssemester an der Universität Uppsala (Schweden)
seit April 1999	Wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abteilung Medizinische Statistik, Universität Göttingen