Multifraktale und Asymptotiken großer Deviationen

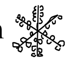
Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg–August–Universität zu Göttingen

vorgelegt von Marc Keßeböhmer
aus Springe

Göttingen 1999

D 7
Referent: Prof. Dr. M. Denker
Korreferent: Prof. Dr. S. J. Patterson
Tag der mündlichen Prüfung:

Inhaltsverzeichnis

„Aus wird , aus diesem wird , aus diesem , aus diesem  und Gott weiß was noch mehr. Auch wohl mitunter einmal  und aus diesem verdunstenden Spinnegewebe wieder hunderterlei Linien, die sich unter einem Winkel von 60° durchschneiden und wieder — und wieder — und wieder — von andern unter gleichen Winkeln durchschnitten werden, sind das Alphabet, aus dem sich alles sagen und schreiben läßt, was auf den Fensterscheiben geschrieben steht."

(Aus einem Brief von G. C. Lichtenberg an G. A. Ebell, 12 Feb. 1795)

Während der Erstellung der Dissertation war ich Mitglied des Graduiertenkollegs „Strömungsinstabilitäten und Turbulenz" an der Georg–August–Universität Göttingen. Ich bedanke mich für die gute Zusammenarbeit mit den Kollegiaten und Betreuern sowie für die guten Weiterbildungsmöglichkeiten in Seminaren und Exkursionen. Ebenso danke ich dem Deutschen Akademischen Austauschdienst für die Vergabe eines Kurzzeitstipendiums, das mir einen Besuch an der University of St. Andrews bei Prof. K. Falconer, Dr. L. Olsen und Dr. B. Stratmann, denen mein Dank für die freundliche Aufnahme gilt, ermöglichte. Insbesondere gilt mein Dank Herrn Prof. M. Denker für stets ermutigende Unterstützung.

1 Einleitung

Kolmogoroff präsentierte 1941 in [Kol41] eine Theorie selbstähnlicher, homogener, stationärer, vollständig entwickelter Turbulenz, die sich auf die Navier–Stokes–Gleichung in Verbindung mit einigen einfachen Hypothesen stützte und überraschend genaue Übereinstimmung mit experimentellen Daten zeigte. In der Kolmogoroffschen Theorie werden statistische Gesetze für die bestimmenden Observablen der turbulenten Strömung entwickelt. An zentraler Stelle steht die lokale Energiedissipation $\epsilon(x)$. Es sei $\bar{\epsilon}(V)$ der räumliche Mittelwert der Energiedissipation im Volumen V. Dann besagt die heute als Kolmogoroffs dritte Hypothese bezeichnete Forderung, daß $\bar{\epsilon}(V)$ unabhängig von V logarithmisch normalverteilt sei.

Yaglom [Yag66] leitet die von Kolomogoroff geforderte logarithmische Normalverteilung der Energiedissipation von einem Kaskadenmodell der Turbulenz ab, das die Energieübertragung von größeren zu kleineren Wirbeln statistisch beschreibt. Schon bei dieser Betrachtung wird deutlich, daß die Raumpunkte mit einer lokalen Energiedissipation ungleich 0 nicht gleichmäßig den ganzen Raum, sondern nur ein sehr kleines Volumen einnehmen.

In den Jahren 1972 und 1974 weist Mandelbrot in [Man72] und [Man74] darauf hin, daß diese dritte Kolmogoroffsche Hypothese gravierende konzeptionelle Schwierigkeiten impliziere und die beobachtete Asymptotik der experimentell beobachteten Korrelation

$$\langle \bar{\epsilon}(V)\bar{\epsilon}(V+\Delta x)\rangle \sim \left(\frac{L}{|\Delta x|}\right)^{\mu}$$

nicht zu erklären vermag; mit $\langle A\rangle$ ist die Mittelung der Observablen A über verschiedene Realisationen des Experiments gemeint.

Mandelbrot hält an dem Yaglomschen Kaskadenmodell fest, ist aber bemüht, die Statistik der Energieübertragung so zu variieren, daß die gefundenen Schwierigkeiten behoben werden können. Dieses Vorhaben begründet die Theorie der Multifraktale. Bei seinen Untersuchungen stellt Mandelbrot unter anderem fest, daß die Punkte mit nicht verschwindender Energiedissipation eine Menge im Raum mit fraktaler Dimension einnehmen.

Frisch und Parisi [FP85] und später Halsey et al. [HJK$^+$86] nahmen diese Ideen auf, schufen einen einfacheren Formalismus und etablierten die Bezeichnung „Multifraktal". Sie untersuchten –anders als Mandelbrot– ein 'nicht–zufälliges', durch ein induktives multiplikatives Verfahren konstruiertes Maß μ, indem sie das Skalierungsverhalten der 'Zustandssumme'

$$Z(t,\epsilon) := \sum_{G_i} \mu(G_i)^t$$

(summiert wird über ein Gitter $\{G_i\}$ der Kantenlänge ϵ) in ϵ betrachteten, und den Zusammenhang zur fraktalen Dimension $f(\alpha)$ der Mengen der Punkte x mit konstantem Hölderexponent

$$\alpha := \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\log \mu(B_\epsilon(x))}{\log \epsilon}$$

herstellten ($B_\epsilon(x)$ ist der Ball um x mit Radius ϵ). Dabei fanden Halsey et al., daß in einfachen Situationen die von Hentschel und Procaccia in [HP83] eingeführte einparametrige Familie von verallgemeinerten Rènyi–Dimension und das oben betrachtete $f(\alpha)$–Spektrum sich gegenseitig eindeutig bestimmen. Dieses Verhältnis wird als multifraktaler Formalismus bezeichnet. Eines der Ziele Halsey et al. war es dabei, das multifraktale Spektrum $f(\alpha)$ harmonischer Maße fraktaler Wachstumsprozesse (**D**iffusion-**L**imited **A**gregation) zu ermitteln.

Mit Blick auf diesen Formalismus wurde zuerst von Benzi et al. [BPPV84] ein Zusammenhang zwischen vollständig entwickelter Turbulenz und „chaotischen Systemen" nachgewiesen.

Von Fujisaka wurde 1987 in [Fuj87] auf eine Analogie zwischen der Theorie der Multifraktale und dem von Bowen [Bow75] und Ruelle [Rue78] entwickelten thermodynamischen Formalismus hingewiesen (siehe hierzu auch den Übersichtsartikel von Tél [Tél88]).

Der thermodynamische Formalismus ist bei der mathematischen Untersuchung dynamischer Systeme seit langem etabliert und kann genutzt werden, mathematisch rigoros das $f(\alpha)$–Spektrum gewisser, bezüglich eines dynamischen Systems invarianter Maße zu bestimmen (siehe z. B. [BR87], [Col88], [Ran89], [Lop89], [KG92], [CM92], [EM92]).

Eine konsequente und mathematisch präzise Verallgemeinerung des multifraktalen Spektrums, wie sie z.B. von Pesin in [Pes88] für das Lyaponov-Spektrum geleistet wurde, stellt sich wie folgt dar: Man betrachtet auf einem Raum X eine Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ und eine weitere reellwertige Funktion D, definiert auf einer Teilmenge der Potenzmenge von X. Das Spektrum bezüglich h und D wird dann definiert durch

$$f(\alpha) := D\left(\{x \in X : h(x) = \alpha\}\right).$$

Falls X ein metrischer Raum und μ ein Borelmaß auf X ist, kann man für D beispielsweise die Hausdorff– oder Packungsdimension und für h die (obere oder untere) lokale Dimension

$$d_\mu(x) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\log \mu(B_\epsilon(x))}{\log \epsilon}$$

wählen. Diese Fälle sind von Olsen in [Ols95] untersucht worden. Durch Einnehmen dieses rein maß– und dimensionstheoretischen Standpunktes wird deutlich, daß der multifraktale Formalismus, so wie oben dargestellt, nur in Spezialfällen gültig ist.

Jedoch läßt dieser abstrakte Standpunkt die für die Physik wichtigen asymptotischen Gesetze, die mit dem multifraktalen Formalismus einhergehen, in den Hintergrund rücken. Allerdings besteht zwischen dem thermodynamischen Formalismus –und somit auch dem multifraktalen Formalismus– und der Theorie großer Deviationen, wie sie beispielsweise in [Ell85] entwickelt wurde, ein enger Zusammenhang, der nun genutzt werden kann, um die Asymptotik gewisser statistischer Größen zu erhalten. So verwendet zum Beispiel Riedi diesen Zusammenhang in [Rie95] und zeigt, wie unter gewissen Annahmen die Theorie großer Deviationen multifraktalen Charakteristika statistische Bedeutung verleiht. Die Theorie großer Deviationen führt zum einen zu Methoden, das multifraktale Spektrum als physikalische Größe zu messen, zum anderen ermöglicht sie, die interessierenden Größen mittels statistischer Gesetze neu zu interpretieren. Da die Theorie großer Deviationen auf eine große Klasse von Prozessen angewandt werden kann, bereichert sie die Untersuchungsmöglichkeiten einer Vielzahl komplizierter Systeme (wie etwa das der vollständig entwickelten Turbulenz). – Fragen der geometrischen Maßtheorie treten dabei jedoch in den Hintergrund (in [Man88] stellt Mandelbrot die statistische Interpretation des $f(\alpha)$-Spektrums via Gesetzen großer Deviationen in den Vordergrund).

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß in dem Fall, in dem das betrachtete multifraktale Maß durch den thermodynamischen Formalismus beschrieben wird, sehr starke lokale asymptotische Gesetze gelten. Dazu werden zuerst Grenzwertsätze großer Deviationen für den Prozeß

$$(S_{m_R(x)}\varphi(x)) := \sum_{i=0}^{m_r(x)} \varphi \circ S(x)$$

bewiesen; dabei ist $m_R(x)$ eine geeignete Stoppzeit auf einem Teilshift endlichen Typs, φ ist eine ebendort definierte hölderstetige reellwertige Funktion und S ist die Shiftabbildung. Alsdann werden solche Konsequenzen entwickelt, die den Zusammenhang zur Theorie der Multifraktale herstellen. Eines dieser Theoreme (Theorem 4.11) folgt eng den in [Ell85] entwickelten Konzepten; im multifraktalen Kontext (Korollar 4.12) besagt es, daß

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{-\log r} \log \left(\mu_{\beta(0)\psi} \left(\left\{ \frac{S_{n_r(x)}\varphi(x)}{-\log r} \geq \beta'(t) \right\} \right) \right) = f(\alpha(t)) - \beta(0)$$

für $t \geq 0$ gilt (entsprechendes für $t \leq 0$). Die lokale Variante (Theorem 5.2) für den oben betrachteten Prozeß hat folgende Gestalt:

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R \in [a,b]\right\}\right) \;{}_R\!\sim_{0+}\; \frac{C(\alpha)\int_a^b e^{-t(\alpha)s}\,ds}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}}\;\frac{e^{(f(\alpha)-\beta(0))R}}{\sqrt{R}}.$$

Das Symbol für die hier verwendete Asymptotik ist in der Notation 5.1 erklärt. Der Beweis dieser Asymptotik ist angelehnt an die in [Wad96] entwickelten Methoden; dort werden vergleichbare Resultate für Anosov–Flüsse erzielt. Insbesondere werden in dieser Arbeit Lemmata formuliert, die der Tatsache gerecht werden, daß der hier betrachtete Prozeß nicht differenzierbar ist. Der Beweis stützt sich auf eine Anwendung des Tauberschen Theorems von Katsuda und Sunada [KS90]; hierfür sind die analytischen Eigenschaften einer Laplace–Transformierten von entscheidender Bedeutung. Die notwendigen Eigenschaften werden durch ein genaues Studium des komplexen Ruelle–Operators überprüft. Im ersten Abschnitt sind die hierfür benötigeten Begriffe und Sätze zusammengestellt.

Ähnliche Resultate wie Theorem 5.2 erziehlt Lalley in [Lal85] und [Lal87] für den diskreten Prozeß $S_n\varphi(x)$ auf einem Gibbsschen Teilshift endlichen Typs bzw. für Asymptotiken der Anzahlfunktion gewisser peridioscher Orbits symbolischer Flüsse. Allerdings verwendet Lalley keine Tauberschen Theoreme, ist jedoch auch auf das genauen Studium der spektralen Eigenschaften des komplexen Ruell–Operators angewiesen. (Tatsächlich bezweifelt er, daß die Anwendung Tauberscher Theoreme seine Resultate ermöglichen). Auch in der Arbeit von Guivarc'h und Harady [GH88] findet man lokale Grenzwertsätze für Gibbsche Teilshifts, die Ähnlichkeit mit dem Theorem 5.2 aufweisen: Dort wird für ein Gibbs–Maß ν, eine aperiodische hölderstetige Funktion f mit $\int f\,d\nu = 0$ (d.h. f ist zentriert) und ein beliebiges Intervall I gezeigt, daß gilt:

$$\nu\left\{x : \sum_{k=0}^{n-1} f \circ S^k(x) \in I\right\} \;{}_n\!\sim_{\infty}\; \frac{\lambda(I)}{\sigma\sqrt{2\pi n}}.$$

Es wäre wünschenswert, auch hierfür eine Verallgemeinerung für den gestoppten Prozeß $S_{m_R(x)}f(x)$ mit Methoden zu beweisen, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet werden.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Im Kapitel 2 werden die grundlegenden Begriffe zusammengestellt, die für die Formulierung der Resultate und später für den Beweis des Theorems 5.2 notwendig sind.

In Kapitel 3 wird das $f(\alpha)$–Spektrum für Maße erklärt, und es wird beschrieben, wie der thermodynamische Formalismus dazu dienen kann, dieses Spektrum mathematisch exakt zu ermitteln. An dieser Stelle wird auf weiterführende Literatur verwiesen, die zahlreiche Beispiele bereitstellt, bei denen die hier beschriebene Verfahrensweise zur Anwendung gebracht werden kann. Alle weiteren Sätze sind abstrakt für Teilshifts endlichen Typs formuliert, sind aber in der in diesem Kapitel beschriebenen Weise auf konkrete Probleme anwendbar.

Der erste Teil des 4. Kapitels gibt eine Einführung in die allgemeine Theorie großer Deviationen für diskrete Prozesse. Im zweiten Teil wird dann gezeigt, wie man mit Hilfe dieser Theorie durch Betrachtung des richtigen Prozesses (nämlich $S_{m_{R}(x)}\varphi(x)$) das $f(\alpha)$–Spektrum durch ein statistisches Gesetz erhalten kann.

In Kapitel 5 wird gezeigt, daß das Gesetz großer Deviationen für den Prozeß $S_{m_{R}(x)}\varphi(x)$ eine wesentliche Verschärfung erlaubt. Es wird ein lokales Gesetz großer Deviationen für den Prozeß formuliert, und es werden Korollare bewiesen, wie z. B. ein lokaler zentraler Grenzwertsatz für diesen Prozeß (Korollar 5.6). Im zweiten Teil werden diese Ergebnisse in den multifraktalen Kontext eingebettet.

Das letzte Kapitel ist dem Beweis des Theorems 5.2 gewidmet. Der Übersichtlichkeit wegen werden die sehr entscheidenden analytischen Eigenschaften der Laplace-Transformierten einer momentenerzeugenden Funktion im ersten Teil vorangestellt, bevor im zweiten Teil der eigentliche Beweis folgt. Die bei diesem Beweis entwickelten Methoden ermöglichen es dann, auch den Beweis des Korollars 5.3 zu erbringen.

2 Grundlegende Begriffe und Sätze

2.1 Hölderstetige Funktionen und Gibbs–Maße auf Teilshifts

Im Folgenden sollen zunächst die mittlerweile zum Standard zählenden Fakten, die für die Untersuchungen benötigt werden, zusammen mit den Referenzen unbewiesen angegeben werden.

Es sei A eine irreduzible aperiodische 0–1–wertige $a \times a$ Matrix ($a \geq 2$). Die Menge

$$X := \left\{ x := (x_i) \in \{1, 2, 3, \ldots, a\}^{\mathbb{N}} : \forall i \in \mathbb{N}\, A_{x_i x_{i+1}} = 1 \right\}$$

ausgestattet mit der Metrik

$$d(x, y) := \theta^{\sup\{n : x_i = y_i, 0 \leq i < n\}},$$

für ein $\theta \in (0, 1)$, ist ein kompakter metrischer Raum. Die Shiftabbildung $S : X \to X$, erklärt durch $(S(x))_i = x_{i+1}$, ist ein lokaler Homöomorphismus mit einer beschränkten Anzahl von Urbildern. Fortan soll mit dem Paar (X, S) immer dieser einseitige Teilshift endlichen Typs gemeint sein. (Weitere Details zu Teilshifts findet man zum Beispiel in [DGS76].)

Es werden nun die für den später benötigten Ruelle–Operator adäquaten Funktionenräume definiert:

Mit $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ wird der Raum der komplexwertigen und mit $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf X bezeichnet. Für $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ definiert man die *n–Varianz* durch

$$\mathrm{var}_n(f) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x_i = y_i;\ 0 \leq i < n\}$$

und für ein $\theta \in (0, 1)$ die *θ –Norm* durch

$$|f|_\theta := \sup\left\{ \frac{\mathrm{var}_n(f)}{\theta^n} : n \geq 0 \right\}.$$

Das versetzt uns in die Lage, die Funktionenräume

$$\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C}) : |f|_\theta < \infty\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}) \cap \mathcal{C}(X,\mathbb{R}),$$

sowie die Norm

$$\|f\|_\theta := |f|_\theta + \|f\|_\infty$$

zu erklären. Für diese Räume gilt

Proposition 2.1 ([PP90]). *Die Funktionenräume $(\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}), \|\cdot\|_\theta)$ und $(\mathcal{F}_\theta(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\theta)$ sind Banach–Algebren, und für f und $g \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}) \supset \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R})$ gilt*

$$\|fg\|_\theta \leq \|f\|_\theta \, |g|_\infty + \|g\|_\theta \, |f|_\infty .$$

Schließlich bezeichne $\mathcal{H}(X) = \bigcup_{\theta\in(0,1)} \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R})$ die Menge der reellwertigen hölderstetigen Funktionen auf X. Für die nächste Proposition benötigen wir folgende

Notation 2.2. Für $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ und $x \in X$ wird für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck $S_n f(x)$ erklärt durch

$$S_0 f(x) \equiv 0 \qquad \text{und für} \qquad n > 0 \qquad S_n f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(x));$$

dabei sei S^0 die Identität auf X und für $i > 0$ sei S^i die i–fache Komposition der Abbildung S.

Proposition 2.3 ([Bow75]). *Es sei (X,S) ein Teilshift endlichen Typs. Für jedes $f \in \mathcal{H}(X)$ gibt es genau ein S–invariantes Borel–Wahrscheinlichkeitsmaß μ_f,* das das Gibbs–Maß *von f genannt wird, und eine eindeutig bestimmte Zahl $P(f)$, die der* Druck *von f genannt wird, so daß gilt:*

$$c^{-1} \leq \frac{\mu_f([x_1,\ldots,x_n])}{\exp(-nP(f) + S_n f(x))} \leq c \tag{2.2.1}$$

für alle $x \in X$, $n \geq 0$ und ein $c > 0$. Das Maß zeichnet sich als Gleichgewichtsmaß aus; d.h., es gilt:

$$P(f) = \sup\left\{h(\nu) + \int f \, d\nu : \nu \in \mathcal{M}(S)\right\} = h(\mu) + \int f \, d\mu. \tag{2.2.2}$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{M}(S)$ den Raum der S–invarianten Borel–Wahrscheinlichkeitsmaße auf X und $h(\nu)$ die maßtheoretische Entropie (bezüglich der Definitionen siehe [DGS76]).

Anmerkung 2.4. Aus der Ungleichung (2.2.1) ergibt sich, falls $P(f) = 0$ ist, die später noch oft benutzte Ungleichung

$$|\log(\mu([x_1,\ldots,x_n]) - S_n f(x)| \le \log c, \tag{2.2.3}$$

für das $c > 0$ aus der Proposition 2.3.

Wir benötigen noch die aus [Rue78] und [Bow75] wohlbekannten Eigenschaften des Drucks. Den Nachweis der hier speziell benötigten Betrachtungen findet man z.B. in [KG92].

Proposition 2.5 ([KG92]). *Es seien φ und $\psi \in \mathcal{H}(X)$. Die Funktion $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $P(t,\beta) := P(t\varphi + \beta\psi)$ ist reell–analytisch, und es gilt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t,\beta) &= \int_X \varphi \, d\mu_{t\varphi+\beta\psi}\,, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} P(t,\beta) &= \int_X \psi \, d\mu_{t\varphi+\beta\psi}\,. \end{aligned}$$

Ist zusätzlich $\psi < 0$, so ist auch $\frac{\partial}{\partial\beta}P < 0$ und das Theorem über implizite Funktionen garantiert eine reell analytische Lösung $\beta(t)$ der Gleichung $P(t,\beta(t)) = 0$, und es gilt

$$\beta'(t) = -\frac{\int_X \varphi \, d\mu_{t\varphi+\beta(t)\psi}}{\int_X \psi \, d\mu_{t\varphi+\beta(t)\psi}}.$$

Ist darüber hinaus $P(\varphi) = 0$, so gilt $\beta' \le 0$. (Denn aufgrund der Maximaleigenschaft (2.2.2) des Drucks gilt $\int_X \varphi \, d\mu_{t\varphi+\beta\psi} \le 0$.) Letztlich ist dann $\beta'' \ge 0$ und die Nullstellen von β' und β'' sind wegen der reellen Analytizität entweder isolierte Punkte oder $\beta(t)$ ist eine Gerade.

2.2 Der Ruelle–Operator

Definition 2.6. Für $f \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ definieren wir den *Ruelle–Operator* $\mathcal{L}_f : \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}) \to \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$, für $x \in X$, vermöge

$$(\mathcal{L}_f g)(x) := \sum_{\{y:Sy=x\}} e^{f(y)} g(y).$$

Anmerkung 2.7. Es gilt $\mathcal{L}_f(\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})) \subset \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$. Ferner werden folgende Rechenregeln wiederholt benötigt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f g &= \mathcal{L}_0\left(e^f g\right), \\ \mathcal{L}_f^n g(x) &= \mathcal{L}_0^n\left(e^{S_n f} g\right)(x) = \sum_{\{y:S y=x\}} e^{S_n f(y)} g(y), \end{aligned}$$

für $x \in X$.

Definition 2.8. Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ heißen *kohomolog* (in Zeichen: $f \sim g$), wenn es eine stetige Funktion $w \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ gibt, so daß $f = g + w \circ S - w$.

Mit dieser Definition lassen sich nun die wichtigen spektralen Eigenschaften des komplexen Ruelle–Operators formulieren.

Proposition 2.9 ([Rue78, (i)-(iii)],[Pol84, (iv)]). *Es sei $f = u + iv \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$, mit $u, v \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R})$, gegeben. Dann gilt:*

(i) Der Ruelle–Operator $\mathcal{L}_u$ hat den eindeutigen einfachen positiven Eigenwert $e^{P(u)}$, der zu einer strikt positiven Eigenfunktion $h_u \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R})$ korrespondiert. Das übrige Spektrum des Operators $\mathcal{L}_u : \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}) \to \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ ist in einem Kreis um 0 enthalten, dessen Radius echt kleiner $e^{P(u)}$ ist.

(ii) Es gibt ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß ν_u, so daß $\mathcal{L}_u^* \nu_u = e^{P(u)} \nu_u$ und $\int h_u \, d\nu_u = 1$ ist.

(iii) Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathcal{L}_u^n g}{e^{nP(u)}} = h_u \int g \, d\nu_u,$$

wobei die Konvergenz exponentiell und gleichmäßig für alle $g \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ ist.

(iv) Das Spektrum von $\mathcal{L}_f$ ist in dem abgeschlossenen Kreis um den Ursprung mit Radius $e^{P(u)}$ enthalten; für $\lambda \in [0, 2\pi)$ ist $e^{i\lambda + P(u)}$ genau dann ein Eigenwert von $\mathcal{L}_f$, wenn $v \sim M + \lambda$ mit $M \in \mathcal{C}(X, 2\pi\mathbb{Z})$ gilt. Hat der Operator $\mathcal{L}_f$ keinen Eigenwert vom Betrag $e^{P(u)}$, dann ist sein Spektralradius echt kleiner als $e^{P(u)}$. Die Abbildung des Operators $\mathcal{L}_f$ auf seinen Spektralradius $\rho(\mathcal{L}_f)$ von $\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$ ist oberhalbstetig.

Wir bemerken noch, daß für $u \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R})$ das Gibbs–Maß μ_u aus Proposition 2.3 absolut stetig bezüglich des Maßes ν_u mit Dichte h_u ist (beide wie aus Proposition 2.9) (vgl. [Bow75]), d.h.:

$$\frac{d\mu_u}{d\nu_u} = h_u. \tag{2.2.4}$$

2.3 Pertubationstheorie für den Ruelle–Operator

Es werden folgende Teilmengen von $\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ benötigt:

Notation 2.10. Wir setzen

★ $\mathbf{F}_\theta(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R}) : \exists c \in [0, 2\pi) \, \exists M \in \mathcal{C}(X, 2\pi\mathbb{Z}) : f \sim M + c\}$,

★ $\mathbf{F}_\theta(\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}) : \mathfrak{Im}(f) \in \mathbf{F}_\theta(\mathbb{R})\}$,

★ $\mathbf{I}_\theta(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R}) \setminus \mathbf{F}_\theta(\mathbb{R})$,

★ $\mathbf{I}_\theta(\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}) : \mathfrak{Im}(f) \in \mathbf{I}_\theta(\mathbb{R})\}$.

Offensichtlich gilt $\mathcal{F}_\theta(\mathbb{R}) \subset \mathbf{F}_\theta(\mathbb{C})$.

Für ein $g = u + iv \in \mathbf{F}_\theta(\mathbb{C})$, mit $u \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R})$, und $v \sim M + c$, für ein $M \in \mathcal{C}(X, 2\pi\mathbb{Z})$ und $c \in [0, 2\pi)$, läßt sich die Definition des Drucks vermöge $P(g) := P(u) + ic$ erweitern. In dieser Situation gilt $\mathcal{L}_g = \alpha \mathcal{M} \mathcal{L}_u \mathcal{M}^{-1}$, wobei $\mathcal{M}$ der Multiplikationsoperator $\mathcal{M}g := e^{iv} g$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, mit $|\alpha| = 1$, ist (vgl. [PP90, Seite 84]). Somit ist $h_g := h_u$ Eigenfunktion von $\mathcal{L}_g$ und $\nu_g := \nu_u$ Eigenmaß von $\mathcal{L}_g^*$ jeweils zum Eigenwert $e^{P(g)}$.

Wir benötigen eine Verallgemeinerung des Analytizitätsbegriffs:

Definition 2.11. Es seien B, B_1, B_2 komplexe Banach–Räume. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to B$ heißt *analytisch,* falls für alle beschränkten linearen Funktionale $l : B \to \mathbb{C}$ die Komposition $l \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im üblichen Sinne analytisch ist.

Die Funktion $g : B_1 \to B_2$ heißt *analytisch*, falls für jede analytische Funktion $h : \mathbb{C} \to B_1$ auch die Funktion $g \circ h : \mathbb{C} \to B_2$ analytisch ist.

Die Sätze der Pertubationstheorie (ein detailiertes Studium ermöglicht [Kat80]) garantieren folgende Beobachtung (hier wird Propostion 4.6 aus [PP90] angewandt):

Proposition 2.12. *Für jedes $g \in \mathbf{F}_\theta(\mathbb{C})$ gibt es eine Umgebung $N(g) \subset \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ von g, so daß die Abbildungen*

$$g \mapsto e^{P(g)}, \; g \mapsto \nu_g \; \textit{und} \; g \mapsto h_g$$

analytische Fortsetzungen auf $N(g)$ besitzen, für die für alle $f \in N(g)$ gilt:

$$\mathcal{L}_f h_f = e^{P(f)} h_f, \; \mathcal{L}_f^* \nu_f = e^{P(f)} \nu_f \; \textit{und} \; \int h_f \, d\nu_f = 1;$$

*dabei bezeichnet $\mathcal{M}(X)$ den Raum der Borel–Wahrscheinlichkeitsmaße auf X, der mit der schwachen *–Topologie ausgestattet ist.*

Auf diesen Umgebungen $N(g)$ wird der Druck $P(f)$ durch den Hauptzweig von $\log\left(e^{P(f)}\right)$ definiert.

Anmerkung 2.13. Es sei darauf hingewiesen, daß $f \mapsto \mathcal{L}_f$, $\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}))$, eine analytische Funktion ist, wobei $\mathcal{B}(\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}))$ den Raum der beschränkten linearen Funktionale auf $\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ bezeichnet.(Hierzu vgl. [PP90, Seit 57 f.]).

Die später benötigte folgende Proposition basiert auf den in Proposition 2.9 entwickelten spektralen Eigenschaften des komplexen Ruelle–Operators.

Proposition 2.14 ([Wad96], [Lal85], [Lal87]). *Es sei $g \in \mathbf{F}_\theta(\mathbb{C})$ und $H \subset \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ eine kompakte Teilmenge.*

(i) Für jedes Kompaktum $K_1 \subset N(g)$ ($N(g)$ wie aus Proposition 2.12) gibt es ein $\delta_1 > 0$, so daß gleichmäßig für $f \in K_1$ und $k \in H$ gilt:

$$(1+\delta_1)^n \left\| \frac{\mathcal{L}_f^n k}{e^{nP(f)}} - h_f \int k \, d\nu_f \right\|_\theta \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

(ii) Für jedes Kompaktum $K_2 \subset \mathbf{I}_\theta(\mathbb{C})$ existiert ein $\delta_2 > 0$, so daß gleichmäßig für $f \in K_2$ und $k \in H$ gilt:

$$(1+\delta_2)^n \frac{\left\| \mathcal{L}_f^n k \right\|_\theta}{e^{nP(\mathfrak{Re}(f))}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Die folgende Definition stammt aus Betrachtungen symbolischer Flüsse (vgl. [Lal87]); für diese Arbeit ist sie aus beweistechnischen Gründen erforderlich.

Definition 2.15. Zwei Funktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(X)$ sind *S–unabhängig,* falls für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $t_1\varphi + t_2\psi \sim M \in \mathcal{C}(X, 2\pi\mathbb{Z})$ folgt $t_1 = t_2 = 0$.

3 Das Singularitätsspektrum $f(\alpha)$ und der thermodynamische Formalismus

3.1 Die Definition des Singularitätsspektrums

Es sei E ein euklidischer Raum und μ ein auf der Borelschen σ–Algebra $\mathcal{B}$ von E definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Die *Hausdorffdimension des Wahrscheinlichkeitsmaßes* μ wird dann definiert durch

$$HD(\mu) := \inf\{\dim_H M : M \in \mathcal{B},\ \ \mu(M) = 1\};$$

dabei ist $\dim_H M$ die gewöhnliche Hausdorffdimension der Borelmenge M (für eine Definition der Hausdorffdimension siehe zum Beispiel [Fal90]).

Die lokale Dimension bezüglich μ in einem Punkt $x \in E$ ist gegeben durch den Grenzwert

$$d_\mu(x) := \lim_{r \searrow 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r}, \tag{3.3.1}$$

sofern dieser existiert. Dabei ist $B_r(x)$ die offene Kugel mit Radius r um x. Offensichtlich ist die Funktion d_μ μ–meßbar.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$X_\alpha := \{x \in E : d_\mu(x) = \alpha\}$$

die *Niveau–Menge* von d_μ. Das *Singularitätsspektrum* des Maßes μ ist dann gegeben durch

$$f(\alpha) = \dim_H X_\alpha. \tag{3.3.2}$$

3.2 Multifraktale Maße und thermodynamischer Formalismus

In den Fällen, in denen das betrachtete Maß bestimmte zusätzliche Annahmen erfüllt (eine Fülle von Beispielen findet man in [Pes97], die dort als „Geometric Construction" bezeichnet werden), oder es sich um das Gleichgewichtsmaß der Dynamik eines konformen Axiom–A–Diffeomorphismus handelt (siehe [PW97]), lassen sich dessen Hausdorffdimension und Singularitätsspektrum mit Hilfe des thermodynamischen Formalismus berechnen. Hierzu nutzt man die Konjugation zu einem Teilshift (X, S), der durch den Epimorphismus π vermittlet sei, wie folgt aus:

Man betrachtet eine auf X hölderstetige und strikt negative Funktion ψ, die die Dynamik auf E bestimmt (z.B. $\psi(x) = -\log(|f'(\pi(x))|)$ für Axiom–A–Diffeomorphismen, wobei π die Faktorabbildung von X nach E bezeichnet) und eine auf X hölderstetige Funktion φ, die das zu betrachtende Wahrscheinlichkeitsmaß als Gibbs–Maß zu φ eindeutig bestimmt, d.h., es gilt $\mu = \mu_\varphi \circ \pi^{-1}$. Dabei nehmen wir ohne Einschränkung an, daß der Druck $P(\varphi)$ verschwindet.

Entscheidend für die Übertragbarkeit der Ergebnissen aus dem thermodynamischen Formalismus auf die Theorie der Multifraktale ist zum einen, daß die Menge X_α sich hinreichend kanonisch auf dem Shift–Raum beschreiben läßt. So wird zum Beispiel in [KG92, Seite 341] bewiesen, daß unter gewissen Bedingungen

$$\pi(x) \in X_\alpha \iff \lim_{n\to\infty} \frac{S_n\varphi(x)}{S_n\psi(x)} = \alpha.$$

Ferner kommt das Frostman Lemma zum Einsatz, welches hier kurz in Erinnerung gerufen sei (siehe z.B. [Fal90]):

Lemma 3.1 (Frostman). *Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Euklidischen Raum E. Für μ–fast–alle $x \in E$ gelte*

$$\delta \leq \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \leq \delta_2.$$

Dann gilt $\delta_1 \leq HD(\mu) \leq \delta_2$.

Um das $f(\alpha)$–Spektrum zu berechnen, wendet man dieses Lemma nun auf die geeignete Familie von Gibbs–Maßen $\mu_{t\varphi+\beta(t)\psi}$ an, die die Eigenschaft haben, daß der Träger von $\mu_t := \mu_{t\varphi+\beta(t)\psi} \circ \pi^{-1}$ die Mengen $X_{\alpha(t)}$ enthält. Durch bestimmen der $\mu_{t\varphi+\beta(t)\psi}$–fast–sicheren lokalen Dimension von $\mu_{t\varphi+\beta(t)\psi}$ ermittelt man so die sonst oftmals schwer zu bestimmende untere Abschätzung der Hausdorffdimension der Mengen X_α. Insbesondere erhält man durch Verwendung des Variationsprinzips für den Druck, daß gilt

$$HD(\mu) = \frac{h_\mu(S)}{\int \psi \, d\mu}; \tag{3.3.3}$$

dabei bezeichnet $h_\mu(S)$ die maßtheoretische Entropie. Diese Gleichheit ist zuerst von Young in [You82] bemerkt worden. Die dabei betrachteten Funktionen $\beta(t)$ und $\alpha(t)$ werden innerhalb des thermodynamischen Formalismus für Teilshifts endlichen Typs definiert. Unter Verwendung von Proposition 2.5 und grundlegenden Fakten aus der Analysis konvexer Funktionen definiert man diese Funktionen und erhält für sie die in der folgenden Proposition zusammengestellten wichtigen Eigenschaften.

Proposition 3.2. *Es seien φ, $\psi \in \mathcal{H}(X)$ mit $\psi < 0$ und $P(\varphi) = 0$. Dann gibt es für jedes $t \in \mathbb{R}$ genau ein $\beta(t) \in \mathbb{R}$ mit $P(t\varphi + \beta(t)\psi) = 0$. Die Funktion $\beta(t)$ ist reell–analytisch und es gilt $\beta'(t) \leq 0$ sowie $\beta''(t) \geq 0$. Dabei verschwindet β' und β'' entweder nur an isolierten Punkten, oder aber es ist $\beta'' \equiv 0$. Im ersten Fall ist also $\alpha(t) := -\beta'(t)$ invertierbar und der Definitionsbereich der Legendre–Transformierten $\beta^*(\alpha) =: f(\alpha)$ ist das Intervall $\Gamma := \{-\beta'(t) : t \in \mathbb{R}\}$. In diesem Fall bilden f und β ein Legendre–Transformierte–Paar, d.h., es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Beziehung*

$$f(\alpha(t)) = t\alpha(t) + \beta(t).$$

Anmerkung 3.3. Die eingeführten Notationen von $\beta(t)$, $\alpha(t)$, $f(\alpha)$ und Γ werden in dieser Arbeit durchgehend in diesem Sinne verwendet.

Es sei Bemerkt, daß in [KG92] gezeigt wird, daß für invariante Maße von iterierten Funktionensystemen konformer Abbildungen bei geeigneter Konjugationsabbildung die in Proposition 3.2 erklärte Funktion $f(\alpha)$ mit der obigen Definition (3.3.2) des multifraktalen Spektrums übereinstimmt; an diesem Beispiel wird der in diesem Abschnitt beschriebene Zusammenhang zwischen thermodynamischem Formalismus und der Theorie der multifraktalen Maße besonders gut deutlich. Für weitere Beispiele siehe auch [PW96].

4 Das Gesetz großer Deviationen

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, wie man durch Anwendug der Theorie großer Deviationen auf einen gewissen kontinuierlichen Prozeß $(S_{n_r}\varphi)_{r\in(0,1)}$ die in Kapitel 3 mittels des thermodynamischen Formalismus erklärten multifraktalen Charakteristika $f(\alpha)$ und $\beta(t)$ erhält.

Zuerst werden die benötigten Sätze aus der Theorie großer Deviationen zusammengestellt (für die Details sei auf [Ell85] verwiesen).

4.1 Große Deviationen für diskrete Prozesse

Notation 4.1. Im folgenden sei $\mathcal{W} = \{W_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von $\mathbb{R}^d$–wertigen Zufallsvariablen, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable W_n auf den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ definiert sei. Die Zufallsvariablen definieren die Funktionenfolge c_n, die für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}^d$ gegeben wird durch

$$c_n(t) := \frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}_n (\exp \langle t, W_n \rangle);$$

wobei (a_n) eine Folge positiver reeler Zahlen sei, die nach Unendlich strebe, $\mathbb{E}_n$ bezeichnet die $\mathbb{P}_n$–Erwartung und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt.

Für den weiteren Verlauf der Untersuchungen nehmen die folgenden zwei Hypothesen eine zentrale Rolle ein.

Bedingung 4.2.

(i) Die Werte $c_n(t)$ seien endlich für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}^d$.

(ii) Der Grenzwert $c_{\mathcal{W}}(t) := \lim_{n\to\infty} c_n(t)$ existiere für alle $t \in \mathbb{R}^d$ und sei endlich.

Aus der Analysis konvexer Funktionen ist bekannt:

Lemma 4.3 ([Ell85, Seite 229]). *Sind die Bedingungen* 4.2 *(i) und (ii) erfüllt, dann sind die Funktionen $c_n(t)$ und $c_{\mathcal{W}}(t)$ konvex auf* $\mathbb{R}^d$.

Der Beweis ergibt sich im wesentlichen aus einer Anwendung der Hölderschen Ungleichung.

Anmerkung 4.4. Die Funktion $c_{\mathcal{W}}$ wird in Anlehnung an die Thermodynamik auch *freie Helmholtzenergie* genannt.

Es werden nun noch die zwei folgenden grundlegenden Begriffe aus der Analysis benötigt:

Definition 4.5. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt *unter–halbstetig* auf einer Menge $M \subset \mathbb{R}^d$, falls für alle $x \in M$ und alle Folgen $\{x_n\} \subset M$ mit $x_n \to x$ gilt: $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$.

Man sagt, die Funktion *f* habe *kompakte Niveau–Mengen,* falls die Niveau–Menge $\{x : f(x) \leq a\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ kompakt ist.

Nun ist nach [Roc70, Seite 82] die konvexe Funktion $c_{\mathcal{W}}$, die für alle $t \in \mathbb{R}^d$ endlich ist, auch stetig, insbesondere unter–halbstetig. Darum bilden $c_{\mathcal{W}}$ und ihre Legendre–Fenchel–Transformierte $I_{\mathcal{W}}$, die für $z \in \mathbb{R}^d$ gegeben ist durch

$$I_{\mathcal{W}}(z) := {c_{\mathcal{W}}}^*(z) := \sup_{t\in\mathbb{R}^d}\{\langle z, t\rangle - c_{\mathcal{W}}(t)\},$$

ein Legendre–Paar; d.h., es gilt ${c_{\mathcal{W}}}^{**}(t) = c_{\mathcal{W}}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ (z.B. [Ell85, Seite 221]).

Der folgende Satz wird häufig auch als das Große–Deviationen–Theorem bezeichnet (siehe [Ell85, Theorem II.6.1]).

Theorem 4.6. *Es sei $\mathcal{W} = \{W_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von $\mathbb{R}^d$–wertigen Zufallsvariablen und (a_n) eine Folge reeller Zahlen, die nach Unendlich divergiere, so daß die Hypothesen* 4.2 *(i) und (ii) erfüllt sind. Es sei Q_n die Verteilung von W_n/a_n auf $\mathbb{R}^d$. Dann gilt mit den Bezeichnungen dieses Abschnitts:*

(i) $I_{\mathcal{W}}$ ist konvex, unter–halbstetig, nicht negativ und hat kompakte Niveau–Mengen. Ferner gilt, daß $\inf_{z\in\mathbb{R}^d} I_{\mathcal{W}}(z) = 0$ ist.

(ii) Die obere Große–Deviationen–Abschätzung gilt, d. h., wir haben

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log Q_n\{K\} \leq -\inf_{z\in K} I_{\mathcal{W}}(z) \tag{4.4.1}$$

für jede abgeschlossene Menge $K \subset \mathbb{R}^d$.

(iii) Angenommen, $c_{\mathcal{W}}(t)$ sei zusätzlich für alle $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt auch die untere Große–Deviationen–Abschätzung, d. h. wir haben

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log Q_n\{G\} \geq -\inf_{z\in G} I_{\mathcal{W}}(z) \tag{4.4.2}$$

für jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}^d$.

Anmerkung 4.7. Falls die obere und untere Große–Deviationen–Abschätzung ((4.4.1) und (4.4.2)) gelten und A eine Borel–Menge des $\mathbb{R}^d$ ist mit der Eigenschaft

$$\inf_{z\in \bar{A}} I_{\mathcal{W}}(z) = \inf_{z\in \breve{A}} I_{\mathcal{W}}(z)$$

(diese Eigenschaft der Menge A wird als $I_{\mathcal{W}}$*–Stetigkeit* bezeichnet; ferner wird mit $\bar{A}$ der Abschluß und mit $\breve{A}$ das Innere von A bezeichnet), dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \log Q_n(A) = -\inf_{z\in A} I_{\mathcal{W}}(z)$$

(vgl. [Ell85, Seiten 35-37]).

Um die folgende Proposition formulieren zu können, benötigen wir zunächst noch die Einführung einer speziellen Form der stochastischen Konvergenz.

Definition 4.8. Es sei (W_n) eine Folge von $\mathbb{R}^d$–wertigen Zufallsvariablen, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable W_n auf den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ definiert sei, und (a_n) eine Zahlenfoge mit $a_n \nearrow \infty$. Man sagt, W_n/a_n konvergiert *exponentiell schnell* gegen eine Konstante $z_0 \in \mathbb{R}$ (in Zeichen: $W_n/a_n \xrightarrow{\exp} z_0$), falls es für alle $\epsilon > 0$ ein M und $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq M$ gilt:

$$\mathbb{P}_n\{\|W_n/a_n - z_0\| \geq \epsilon\} \leq e^{-a_n N}.$$

Proposition 4.9 ([Ell85]). *Es sei (W_n) eine Folge von $\mathbb{R}^d$–wertigen Zufallsvariablen, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable W_n auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sei; ferner sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \nearrow \infty$. Die Funktionen c_n und $c_{\mathcal{W}}$ mögen die Bedingung* 4.2 *erfüllen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $W_n/a_n \xrightarrow{\exp} z_0$.

(ii) $c_{\mathcal{W}}$ ist differenzierbar bei $t = 0$ und $\nabla c_{\mathcal{W}}(0) = z_0$.

(iii) $I_{\mathcal{W}}$ nimmt ein eindeutig bestimmtes Minimum bei $z = z_0$ an.

4.2 Das Singularitätsspektrum $f(\alpha)$ via dem Gesetz großer Deviationen

Das in diesem Abschnitt erhaltene Resultat ist inspiriert durch die Arbeit von Riedi [Rie95], in der das $f(\alpha)$–Spektrum mittels der Theorie großer Deviationen und Box–Zählmethoden gewonnen wird.

Es sei (X, S) ein Teilshift endlichen Typs, $\psi, \varphi \in \mathcal{H}(X)$ mit $\psi < 0$ und $P(\varphi) = 0$. Ferner seien die Funktionen $\beta(t)$, $\alpha(t)$ und $f(\alpha)$ für dieses φ und ψ wie in der Proposition 3.2 definiert.

Es sei $0 < r < 1$. Dann gibt es für jedes $x \in X$ genau eine natürliche Zahl $n_r(x)$ mit den Eigenschaften

$$\exp S_{n_r(x)}\psi(x) > r \qquad \text{und} \qquad \exp S_{n_r(x)+1}\psi(x) \leq r \tag{4.4.3}$$

Es soll nun das Große–Deviationen–Theorem für $d = 1$ angewendet werden auf die Folge von Zufallsvariable W_m, definiert auf $(X, \mathcal{B}(X), \mu_{\beta(0)\psi})$, die gegeben ist für $x \in X$ durch

$$W_m(x) := S_{n_{r_m}(x)}\varphi(x),$$

und die Folge (a_m), die gegeben ist duch $a_m := -\log r_m$ für eine von oben durch 1 berschränkte Nullfolge (r_m). Dabei ist $\mu_{\beta(0)\psi}$ das eindeutig bestimmte Gibbs–Maß bezüglich $\beta(0)\psi$.

Zunächst läßt sich $c_{\mathcal{W}}(t)$ wie folgt bestimmen.

Proposition 4.10. *Es sei (X, S) ein Teilshift endlichen Typs; ferner seien φ, $\psi \in \mathcal{H}(X)$ mit $\psi < 0$ und $P(\varphi) = 0$; (r_m) sei eine positive, von oben durch 1 beschränkte Nullfolge, und $n_r(x)$ sei definiert wie in* (4.4.3)*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{W}}(t) \quad &:= \quad \lim_{m\to\infty} \frac{1}{-\log r_m} \log \int \exp(tS_{n_{r_m}(x)}\varphi(x))\, d\mu_{\beta(0)\psi} \\ &= \quad \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{-\log r} \log \int \exp(tS_{n_r(x)}\varphi(x))\, d\mu_{\beta(0)\psi} \\ &= \quad \beta(t) - \beta(0). \end{aligned}$$

Beweis. Die Zylindermengen
$\mathcal{C}_r :=$

$$= \{C : \exists x \in X \; mit \; \left[x_1, \dots, x_{n_r(x)}\right] = C \; und \; f\ddot{u}r \; alle \; y \in C \; gilt \; \left[y_1, \dots, y_{n_r(y)}\right] \subset C\}$$

definieren eine disjunkte Zerlegung von X (vgl. diese Konstruktion mit der Moran–Überdeckung bei [PW96]); x_C bezeichne ein $x \in C$ mit der Eigenschaft $\left[x_1, \ldots, x_{n_r(x)}\right] = C$. Für beliebige $x, y \in C$ definiere man $n := n_r(x_C)$, $l := n_r(x)$ und $m := n_r(y)$. Dann ist offensichtlich $n \leq l$ und $n \leq m$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $l \leq m$ ist. Mit Blick auf (4.4.3) sieht man, daß

$$\begin{aligned} \sup|\psi| \geq |S_m\psi(x) - S_l\psi(y)| &= |S_n\psi(x) - S_n\psi(y) - S_{m-n}\psi(S^n(x))| \\ &\geq |S_{m-n}\psi(S^n(x))| - |S_n\psi(x) - S_n\psi(y)|. \end{aligned}$$

Da es aufgrund der Hölderstetigkeit eine Konstante C_ψ gibt, so daß $|S_n\psi(x) - S_n\psi(y)| \leq C_\psi$ gilt, folgt $\sup|\psi| + C_\psi \geq |S_{m-n}\psi(S^n(x))| \geq (n-m)\inf|\psi|$, und somit ist

$$m - n \leq \frac{\sup|\psi| + C_\psi}{\inf|\psi|}.$$

Mit denselben Bezeichnungen gilt für eine positive Konstante C_φ weiter

$$\begin{aligned} |S_m\varphi(x) - S_l\varphi(y)| &\leq |S_n\varphi(x) - S_n\varphi(y) - S_{n-m}\varphi(S^n(x))| \\ &\leq |S_n\varphi(x) - S_n\varphi(y)| + |S_{n-m}\varphi(S^n(x))| \\ &\leq C_\varphi + (n-m)\sup|\varphi| \\ &\leq C_\varphi + \frac{(\sup|\psi| + C_\psi)\sup|\varphi|}{\inf|\psi|}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gestattet zusammen mit den Eigenschaften des Gibbs–Maßes $\mu_{\beta(0)\psi}$ und der Hölderstetigkeit von ψ folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \int \exp(tS_{n_r(x)}\varphi(x))\, d\mu_{\beta(0)\psi} \quad &{}_r\asymp_{0+} \quad \sum_{C\in\mathcal{C}_r} \exp(tS_{n_r(x_C)}\varphi(x_C))\, \mu_{\beta(0)\psi}(C) \\ &{}_r\asymp_{0+} \quad \sum_{C\in\mathcal{C}_r} \exp(tS_{n_r(x_C)}\varphi(x_C)) \exp(\beta(0)S_{n_r(x_C)}\psi(x_C)) \\ &{}_r\asymp_{0+} \quad r^{\beta(0)} \sum_{C\in\mathcal{C}_r} \exp(tS_{n_r(x_C)}\varphi(x_C)); \end{aligned}$$

(für die Erklärung des Relationszeichens ${}_r\asymp_{0+}$ siehe Notation 5.1 im folgenden Kapitel). Logarithmieren, Division durch $-\log r$ und Grenzübergang $r \searrow 0$ liefern dann für alle $t \in \mathbb{R}$, daß

$$c_{\mathcal{W}}(t) = \lim_{r\searrow 0} \frac{\log \sum_{C\in\mathcal{C}_r} \exp(tS_{n_r(x_C)}\varphi(x_C))}{-\log r} - \beta(0).$$

Andererseits gilt, da $\mathcal{C}_r$ eine Überdeckung ist, daß

$$
\begin{aligned}
1 = \sum_{C\in\mathcal{C}_r} \mu_{t\varphi+\beta(t)\psi}(C) \quad &\underset{r}{\asymp}0+ \quad \sum_{C\in\mathcal{C}_r} \exp(tS_{n_r(x_C)}\varphi(x_C))\exp(\beta(t)S_{n_r(x_C)}\psi(x_C)) \\
&\underset{r}{\asymp}0+ \quad r^{\beta(t)}\sum_{C\in\mathcal{C}_r} \exp(tS_{n_r(x_C)}\varphi(x_C));
\end{aligned}
$$

dabei ist $\mu_{t\varphi-\beta(0)\psi}$ das Gibbs–Maß bezüglich $t\varphi+\beta(0)\psi$. Hieraus folgt für alle $t\in\mathbb{R}$, daß

$$
\beta(t) = \lim_{r\searrow 0} \frac{\log\sum_{C\in\mathcal{C}_r}\exp(tS_{n_r(x_C)}\varphi(x_C))}{-\log r}. \tag{4.4.4}
$$

Das beweist die Proposition. □

Aus der Proposition 3.2 sind die analytischen Eigenschaften von $\beta(t)$ und somit auch von $c_{\mathcal{W}}(t)$ bekannt. Folglich sind die Hypothesen (a) und (b) des Große–Deviation–Theorems erfüllt, so daß das Theorem 4.6 anwendbar ist, und wir das folgende Theorem erhalten.

Theorem 4.11. *Es sei (X,S) ein Teilshift endlichen Typs; ferner seien $\varphi,\ \psi\in\mathcal{H}(X)$ mit $\psi<0$ und $P(\varphi)=0$; für $r\in(0,1)$ und $x\in X$ sei $n_r(x)$ die eindeutig bestimmte Zahl mit $-S_{n_r(x)}\psi(x)\le-\log r<-S_{n_r(x)+1}\psi(x)$; K sei eine β^*–stetige Menge. Dann gilt:*

$$
\lim_{r\searrow 0}\frac{1}{-\log r}\log\left(\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{\frac{S_{n_r(x)}\phi(x)}{-\log r}\in K\right\}\right)\right) = -\inf_{z\in K}\beta^*(z).
$$

Falls $\beta''\not\equiv 0$ gilt, ist $\beta^*(\beta'(t)) = t\beta'(t)-\beta(t)+\beta(0)$ für alle $t\in\mathbb{R}$. Hiermit erhält man sofort das folgende Korollar.

Korollar 4.12. *Die Voraussetzungen des Theorems 4.11 seien erfüllt. Es sei $\beta''\not\equiv 0$. Dann gilt für alle $t\ge 0$, daß*

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\searrow 0}\frac{1}{-\log r}\log\left(\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{\frac{S_{n_r(x)}\varphi(x)}{-\log r}\ge\beta'(t)\right\}\right)\right) &= -t\beta'(t)+\beta(t)-\beta(0) \\
&= f(\alpha(t))-\beta(0).
\end{aligned}
$$

Und für alle $t\le 0$ gilt, daß

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\searrow 0}\frac{1}{-\log r}\log\left(\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{\frac{S_{n_r(x)}\varphi(x)}{-\log r}\le\beta'(t)\right\}\right)\right) &= -t\beta'(t)+\beta(t)-\beta(0) \\
&= f(\alpha(t))-\beta(0).
\end{aligned}
$$

Als Folgerung der Proposition 4.9 ergibt sich, daß gilt

$$\frac{S_{n_r(\cdot)}\varphi}{\log r} \xrightarrow{\exp} \alpha(0).$$

Anmerkung. Falls die Gleichheit (3.3.3) erfüllt ist, dann folgt insbesondere, daß $\beta(0) = HD(\mu)$.

Der Beweis der Proposition 4.10 zeigt aber noch mehr. Nämlich für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt sogar

$$c^r_{\mathcal{W}}(t) := \int \exp(tS_{n_r(x)}\varphi(x))d\,\mu_{\beta(0)\psi} \ {}_{r}\!\sim_{0+} \ r^{\beta(t)-\beta(0)}.$$

Diese Tatsache gibt Anlaß zu der Vermutung, daß sich eine „schärfere Asymptotik" als die in Theorem 4.11 finden läßt. Diese Vermutung wird Gegenstand des folgenden Kapitels sein.

5 Lokale Gesetze großer Deviationen und Folgerungen

Im ersten Teil dieses Kapitels wird ein lokales Gesetz großer Deviationen für eine gestoppte Summation von Zufallsvariaben formuliert, und es werden einige Korollare bewiesen. Diese Untersuchungen führen dann im zweiten Teil zu dem bereits eingangs erwähnten Zusammenhang zur Theorie der multifraktalen Maße.

Zunächst benötigen wir die folgenden Asymptotiknotationen:

Notation 5.1. Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, ferner sei $a \in \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $b \in \mathbb{R}$.

- ★ $f(x) \ {}_x\!\sim_a \ g(x) :\Longleftrightarrow$ Es gibt eine offene Umgebung U von a, so daß für $x \in \dot{U} := U \setminus \{a\}$ der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, und

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \dot{U}}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- ★ $f(x) \ {}_x\!\sim_{b+} \ g(x) :\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für $x \in (b, b + \delta)$ der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, und

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (b, b+\delta)}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- ★ $f(x) \ {}_x\!\asymp_a \ g(x) :\Longleftrightarrow$ Es gibt eine offene Umgebung U von a, so daß für $x \in \dot{U} := U \setminus \{a\}$ der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, ferner gibt es zwei Konstanten $k_1 \geq k_2 > 0$, so daß für alle $x \in \dot{U}$ gilt

$$k_2 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq k_1. \tag{5.5.1}$$

★ $f(x)\ {}_{x}\!\asymp_{b+}\ g(x)$:$\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\delta > 0$, so daß $\frac{f(x)}{g(x)}$ in $(b, b+\delta)$ existiert, ferner gibt es zwei Konstanten $k_1 \geq k_2 > 0$, so daß für alle $x \in (b, b+\delta)$ gilt:

$$k_2 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq k_1.$$

Ferner werden die folgenden Landau–Symbole verwendet.

★ $f(x) = \mathcal{O}_x^a(g(x))$:$\Longleftrightarrow$ Es gibt eine offene Umgebung U von a, so daß für $x \in \dot{U} = U\backslash\{a\}$ der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$existiert, ferner gibt es eine Konstante $k > 0$, so daß für alle $x \in \dot{U}$ gilt:

$$-k < \frac{f(x)}{g(x)} < k.$$

★ $f(x) = \mathcal{O}_x^{b+}(g(x))$:$\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für $x \in (b, b+\delta)$ der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, ferner gibt es eine Konstante $k > 0$, so daß für alle $x \in (b, b+\delta)$ gilt

$$-k < \frac{f(x)}{g(x)} < k.$$

★ $f(x) = o_x^a(g(x))$:$\Longleftrightarrow$ Es gibt eine offen Umgebung U von a, so daß für $x \in \dot{U} := U\setminus\{a\}$ der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, und es gilt

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\dot{U}}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

★ $f(x) = o_x^{b+}(g(x))$:$\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für $x \in (b, b+\delta)$ der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, und es gilt

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in(b,b+\delta)}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Im weitern bezeichnen wir wie zuvor mit $\mathcal{H}(X)$ den Raum der reellwertigen hölderstetigen Funktionen auf X. Ferner seien f, β und α die in Proposition 3.2 auf Seite 15 eingeführten Funktionen des multifraktalen bzw. thermodynamischen Formalismus hinsichtlich der Potentiale φ und $\psi \in \mathcal{H}(X)$. Außerdem sei die Menge $\Gamma := \{-\beta'(t) : t \in \mathbb{R}\}$, falls sie mehr als einen Punkt enthält, der Definitionsbereich von t, der Umkehrfunktion von α. Für $\psi < 0$ gibt es für alle $R > 0$ und $x \in X$ eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die $-S_m\psi(x) \leq R < -S_{m+1}\psi(x)$ gilt. Diese mit $m_R(x)$ bezeichnete Funktion definiert eine Stoppzeit auf X.

5.1 Der gestoppte stochastische Prozeß

Wir beginnen mit der Formulierung des *lokalen Gesetzes großer Deviationen* für die gestoppte Summe von Zufallsvariablen $S_{m_R(x)}\varphi(x)$.

Theorem 5.2 (Lokales Gesetz große Deviationen). *Es sei (X, S) ein Teilshift endlichen Typs und $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(X)$ seien S–unabhängig, wobei $\psi < 0$ und $P(\varphi) = 0$. Für $R > 0$ und $x \in X$ bezeichnet $m_R(x)$ die eindeutig bestimmte Zahl mit $-S_{m_R(x)}\psi(x) \leq R < -S_{m_R(x)+1}\psi(x)$.*

Dann gilt für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Gamma$ und $a < b$:

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R \in [a, b]\right\}\right) \underset{R\sim\infty}{} \frac{C(\alpha)\int_a^b e^{-t(\alpha)s}\,ds}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}} \frac{e^{(f(\alpha)-\beta(0))R}}{\sqrt{R}}.$$

Dabei ist die Asymptotik gleichmäßig in $\alpha \in K$. Die Konstante $C(\alpha)$ wird explizit innerhalb des Beweises in Gleichung (6.6.4) *angegeben.*

Der Beweis dieses Theorems wird im letzten Kapitel gegeben. Doch zuvor geben wir einige wichtige Konsequenzen.

Korollar 5.3 (Große Deviationen). *Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Theorem* 5.2 *gilt für $t > 0$*

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) \geq -\alpha(t)R\right\}\right) \underset{R\sim\infty}{} \frac{C(\alpha(t))}{t\sqrt{2\pi\beta''(t)}} \frac{e^{(f(\alpha(t))-\beta(0))R}}{\sqrt{R}}.$$

Ist $t < 0$, so gilt

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) \leq -\alpha(t)R\right\}\right) \underset{R\sim\infty}{} \frac{C(\alpha(t))}{-t\sqrt{2\pi\beta''(t)}} \frac{e^{(f(\alpha(t))-\beta(0))R}}{\sqrt{R}}.$$

Der Beweis dieses Korollars wird im Anschluß an den Beweis des Theorems 5.2 gegeben, weil wir hierfür auf die im Beweis von Theorem 5.2 entwickelten Methoden angewiesen sind.

Als sofortige Folgerung aus Korollar 5.3 erhalten wir die folgende Aussage.

Korollar 5.4. *Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Theorem* 5.2. *Ferner bezeichne $J \subset \Gamma$ ein abgeschlossenes Intervall, das den Punkt $\alpha(0)$ nicht enthält und kein leeres Inneres hat. Ferner sei α_J eindeutig gegeben durch $f(\alpha_J) = \sup_{a\in J} f(a)$. Dann gilt*

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{S_{m_R(x)}\varphi(x)}{-R} \in J\right\}\right) \underset{R\sim\infty}{} \frac{C(\alpha_J)}{t(\alpha_J)\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha_J))}} \frac{e^{(f(\alpha_J)-\beta(0))R}}{\sqrt{R}}.$$

Beweis. Da das Supremum über J wegen der Monotonie von f auf $\{\alpha : \alpha > \alpha(0)\}$ bzw. $\{\alpha : \alpha < \alpha(0)\}$ genau an den Randpunkten angenommen wird, folgt für den Fall $J = [a, b]$ mit $\alpha(0) < a < b$ das Korollar aus der Tatsache, daß

$$\begin{aligned}
& \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{S_{m_R(x)}\varphi(x)}{-R} \geq a\right\}\right) - \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{S_{m_R(x)}\varphi(x)}{-R} \geq b\right\}\right) \\
\leq\ & \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{S_{m_R(x)}\varphi(x)}{-R} \in J\right\}\right) \\
\leq\ & \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{S_{m_R(x)}\varphi(x)}{-R} \geq a\right\}\right).
\end{aligned}$$

Denn es gilt $A(R) - B(R) \ {}_R\!\sim_\infty\ A(R)$ für $B(R) = o_R^\infty(A(R))$. Der Fall $a < b < \alpha(0)$ läßt sich analog behandeln. □

Als weitere sofortige Folgerung aus Theorem 5.2 erhalten wir das folgende Resultat.

Korollar 5.5. *Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Theorem* 5.2 *und für* $a < b$ *ergibt sich*

$$f(\alpha) - \beta(0) \quad = \quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log\left(\mu_{\beta(0)\psi}\left(\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R \in [a, b]\}\right)\right).$$

Eine asymptotische Entwicklung von $f(\alpha(t)) - \beta(0)$ um $t = 0$ gibt die folgende Abschätzung.

Korollar 5.6 (Lokaler Zentraler Grenzwertsatz). *Mit den gleichen Voraussetzung wie in Theorem* 5.2 *und für* $u \in \mathbb{R}$ *und* $a < b$ *ergibt sich*

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha(0)R - u\sqrt{R} \in [a, b]\right\}\right) \ {}_R\!\sim_{0+}\ \frac{(b-a)\, e^{-\frac{u^2}{2\beta''(0)}}}{\sqrt{2\pi\beta''(0)}}\ \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Beweis. Wie oben bereits dargelegt, ist die Funktion $f(\alpha)$ reell–analytisch und nimmt bei $\alpha(0)$ ihr Maximum $\beta(0)$ an. Hieraus folgt, daß

$$f(\alpha(0)) - \beta(0) = 0 = f'(\alpha(0)).$$

Schließlich ist $f''(\alpha(0)) = \dfrac{-1}{\beta''(0)} < 0$, so daß gilt:

$$\begin{aligned}
f\left(\alpha(0) - \frac{u}{\sqrt{R}}\right) - \beta(0) \quad &= \quad \frac{f''(\alpha(0))}{2}\frac{u^2}{R} + \mathcal{O}_R^\infty\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right) \\
&= \quad \frac{-u^2}{2\beta''(0)}\frac{1}{R} + \mathcal{O}_R^\infty\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Da

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha(0)R - u\sqrt{R} \in [a,b]\right\}\right) =$$
$$= \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + R\left(\alpha(0) - \frac{u}{\sqrt{R}}\right) \in [a,b]\right\}\right),$$

$C(\alpha)\int_a^b e^{-t(\alpha)s}\,ds$ stetig ist und bei $\alpha(0)$ den Wert $(b-a)$ annimmt (siehe Gleichung (6.6.4) für die Definition von $C(\alpha)$), folgt das Korollar aus Theorem 5.2; hierbei ist natürlich die Gleichmäßigkeit in α von entscheidender Bedeutung. □

Eine unmittelbare Konsequenz des vorherigen Korollars ist der folgende, auch in diesem Umfeld gültige, Zentrale Grenzwertsatz.

Korollar 5.7 (Zentraler Grenzwertsatz). *Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Theorem* 5.2 *und $u \in \mathbb{R}$ gilt für $R \to \infty$*

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha(0)R}{\sqrt{\beta''(0)}\sqrt{R}} \leq u\right\}\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds.$$

5.2 Die multifraktale Interpretation

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, inwiefern die Ergebnisse aus dem Abschnitt 5.1 zu Aussagen im Rahmen der Theorie multifraktaler Maße führen. Hierfür setzen wir $R = -\log r$, $n_r = m_{-\log r}$ und ersetzen $S_{n_r(x)}\varphi(x)$ durch $\log(\mu(C_{n_r(x)}(x)))$, und wenden die Abschätzung (2.2.3) an; dabei ist $C_n(x) := [x_0, \ldots, x_{n-1}]$ die Zylindermenge der Länge n, die x enthält. Wir erhalten so das folgende Resultat.

Korollar 5.8. *Es sei (X,S) ein Teilshift endlichen Typs und $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(X)$ seien S–unabhängig, wobei $\psi < 0$ und $P(\varphi) = 0$; für $x \in X$ und $r \in (0,1)$ sei $n_r(x)$ die eindeutig bestimmte Zahl mit $-S_{n_r(x)}\psi(x) \leq -\log r < -S_{n_r(x)+1}\psi(x)$.*

Dann gilt für $\alpha \in \Gamma$ und $(b-a) > 2\log c$ (hier bezeichnet c die Konstante aus Proposition 2.3 *hinsichtlich des Gibbs–Maßes μ_φ)*

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \log(\mu_\varphi(C_{n_r(x)}(x))) - \alpha\log r \in [a,b]\right\}\right) \;{}_{r}\!\asymp_{0+}\; \frac{r^{f(\alpha)-\beta(0)}}{\sqrt{-\log r}}.$$

Dabei lassen sich explizit Schranken der Asymptotik (das sind die Konstanten $k_1 \geq k_2 > 0$ aus

(5.5.1) *in der Notation* 5.1*) als Funktion von* α*,* a *und* b *angeben; nämlich*

$$\frac{C(\alpha) \int\limits_{a+\log c}^{b-\log c} e^{-t(\alpha)s}\, ds}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}}$$

als untere Schranke und

$$\frac{C(\alpha) \int\limits_{a-\log c}^{b+\log c} e^{-t(\alpha)s}\, ds}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}}$$

als obere Schranke.

Beweis. Indem man die Ungleichung (2.2.3) aus der Bemerkung 2.4 berücksichtigt, erhält man folgende Ungleichungskette

$$\begin{aligned} & \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{n_r(x)}\varphi(x) - \alpha \log r \in [a + \log c, b - \log c]\right\}\right) \\ \leq\ & \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \log(\mu_\varphi(C_{n_r(x)}(x))) - \alpha \log r \in [a, b]\right\}\right) \\ \leq\ & \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{n_r(x)}\varphi(x) - \alpha \log r \in [a - \log c, b + \log c]\right\}\right). \end{aligned}$$

Dividiert man nun durch $\dfrac{r^{f(\alpha)-\beta(0)}}{\sqrt{-\log r}}$, so erhält man für $r \searrow 0$ die gesuchten Schranken. □

Auch das Korollar 5.4 besitzt eine multifraktale Variante, welche eine wesentliche Verfeinerung der in Korollar 4.12 gewonnenen Asymptotik großer Deviationen darstellt. Diese Tatsache ist Gegenstand des folgenden Resultats.

Korollar 5.9. *Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Korollar* 5.8 *ergibt sich für* $t > 0$

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \log(\mu_\varphi(C_{n_r(x)}(x))) \geq \alpha(t) \log r\right\}\right) \underset{r}{\sim}_{0+} \frac{C(\alpha(t))}{t\sqrt{2\pi\beta''(t)}} \frac{r^{f(\alpha(t))-\beta(0)}}{\sqrt{-\log r}}.$$

Ist $t < 0$*, so gilt:*

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \log(\mu_\varphi(C_{n_r(x)}(x))) \leq \alpha(t) \log r\right\}\right) \underset{r}{\sim}_{0+} \frac{C(\alpha(t))}{-t\sqrt{2\pi\beta''(t)}} \frac{r^{f(\alpha(t))-\beta(0)}}{\sqrt{-\log r}}.$$

Beweis. Wir untersuchen hier nur den Fall $t > 0$; der Beweis für $t < 0$ läßt sich analog führen. Aufgrund des Korollars 5.3 und der Ungleichung (2.2.3) aus der Bemerkung 2.4, nebst der Tatsache, daß f monoton fallend in einer Umgebung von $\alpha(t)$, mit $t > 0$, ist und dort auch D, gegeben durch $D(\alpha) := \frac{C(\alpha)}{t(\alpha)\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}}$, ungleich 0 und stetig ist, läßt sich für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, so daß gilt

$$\left| \frac{D(\alpha(t) \pm \delta)}{D(\alpha(t))} - 1 \right| < \epsilon.$$

Darüber hinaus existiert ein $r_0 > 0$, so daß für alle $0 < r < r_0$ gilt $\frac{\log c}{-\log r} < \delta$, und gleichzeitig

$$\left| \frac{\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{n_r(x)}\varphi(x) \geq (\alpha(t) \pm \delta)\log r\right\}\right)\sqrt{-\log r}}{D(\alpha(t) \pm \delta)\, r^{f(\alpha(t)\pm\delta)-\beta(0)}} - 1 \right| \leq \epsilon.$$

Daraus ergibt sich nun die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} &\leq \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{S_{n_r(x)}\varphi(x)}{-\log r} \geq \alpha(t) + \delta\right\}\right) \frac{\sqrt{-\log r}}{(1+\epsilon)D(\alpha(t)+\delta)\, r^{f(\alpha(t)+\delta)-\beta(0)}} \\
&\leq \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{\log(\mu_\varphi(C_{n_r(x)}(x)))}{-\log r} \geq \alpha(t)\right\}\right) \frac{\sqrt{-\log r}}{D(\alpha(t))\, r^{f(\alpha(t))-\beta(0)}} \\
&\leq \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{S_{n_r(x)}\varphi(x)}{-\log r} \geq \alpha(t) - \delta\right\}\right) \frac{\sqrt{-\log r}}{(1-\epsilon)D(\alpha(t)-\delta)\, r^{f(\alpha(t)-\delta)-\beta(0)}} \\
&\leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon},
\end{aligned}$$

woraus das Korollar folgt. □

Das folgende Korollar stellt eine wesentliche Verfeinerung des Theorems 4.11 dar; es ist eine unmittelbare Folgerung des Korollars 5.9.

Korollar 5.10. *Wieder seien die Voraussetzungen des Korollars* 5.8 *erfüllt. Für jedes abgeschlossene Intervall $J \subset \Gamma$, das nicht den Punkt $\alpha(0)$ enthält und kein leeres Inneres haben möge, sei –wie in Korollar* 5.4*– α_J der eindeutig bestimmte Punkt, so daß $f(\alpha_J) = \sup_{a\in J} f(a)$. Dann gilt:*

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : \frac{\log\left(\mu_\varphi\left(C_{n_r(x)}(x)\right)\right)}{-\log r} \in J\right\}\right) \quad {}_r\!\sim_{0+} \quad \frac{C(\alpha_J)}{t(\alpha_J)\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha_J))}} \; \frac{r^{-f(\alpha_J)+\beta(0)}}{\sqrt{-\log r}}$$

Der Beweis dieses Korollars ist vollständig analog zu dem Beweis von Korollar 5.4.

Das Korollar 5.8 impliziert offensichtlich auch das folgende interessante Resultat:

Korollar 5.11. *Es seien die gleichen Voraussetzungen wie im Korollar* 5.8 *erfüllt. Dann gilt für $\alpha \in \Gamma$ und $(b-a) > 2\log c$ (hier bezeichnet c die Konstante aus Proposition* 2.3 *hinsichtlich des*

Gibbs–Maßes μ_φ)

$$f(\alpha)-\beta(0) \quad = \quad \lim_{r\searrow 0}\frac{1}{-\log r}\log\left(\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x:\log\left(\mu_\varphi\left(C_{n_r(x)}(x)\right)\right)+\alpha\log r\in[a,b]\right\}\right)\right).$$

Das Korollar 5.7 liefert nun einen Zentralen Grenzwertsatz im multifraktalen Kontext.

Korollar 5.12 (Zentraler Grenzwertsatz). *Es seien die gleichen Voraussetzung wie im Korollar* 5.8 *erfüllt, und es sei $u\in\mathbb{R}$. Dann gilt für $r\searrow 0$*

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x:\frac{\log\left(\mu_\varphi\left(C_{n_r(x)}(x)\right)\right)-\alpha(0)\log r}{\sqrt{\beta''(0)}\sqrt{-\log r}}\le u\right\}\right)\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds.$$

Beweis. Ähnlich wie bei dem Beweis des Korollars 5.9 findet man für jedes $\epsilon>0$ ein $\delta>0$, so daß gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u-\delta}^{u}e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds<\frac{\epsilon}{2}\quad\text{und}\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u}^{u-\delta}e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds<\frac{\epsilon}{2}.$$

Ebenso findet man ein $r_0>0$, so daß für alle $0<r<r_0$ gilt $\dfrac{\log c}{\sqrt{\beta''(0)}\sqrt{-\log r}}<\delta$ (wieder ist c aus Proposition 2.3 gemeint) und gleichzeitig

$$\left|\mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x:\frac{S_{n_r(x)}\varphi(x)-\alpha(0)\log r}{\sqrt{\beta''(0)}\sqrt{-\log r}}\le u\pm\delta\right\}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u\pm\delta}e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

Zusammengenommen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds-\epsilon &\le \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x:\frac{S_{n_r(x)}\varphi(x)-\alpha(0)\log r}{\sqrt{\beta''(0)}\sqrt{-\log r}}\le u-\delta\right\}\right)\\ &\le \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x:\frac{\log\left(\mu_\varphi\left(C_{n_r(x)}(x)\right)\right)-\alpha(0)\log r}{\sqrt{\beta''(0)}\sqrt{-\log r}}\le u\right\}\right)\\ &\le \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x:\frac{S_{n_r(x)}\varphi(x)-\alpha(0)\log r}{\sqrt{\beta''(0)}\sqrt{-\log r}}\le u+\delta\right\}\right)\\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds+\epsilon.\end{aligned}$$

□

6 Der Beweis des lokalen Gesetzes großer Deviationen

In dem Beweis des lokalen Gesetzes großer Deviationen nimmt die Laplace–Transformierte $Z_\alpha(s, w)$ der momentenerzeugenden Funktion der Zufallsvariablen $(t(\alpha) - iw)(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R)$ eine zentrale Rolle ein (für $R > 0$ und $x \in X$ ist $m_R(x)$ wie vorher die eindeutig bestimmte Zahl mit $-S_{m_R(x)}\psi(x) \leq R < -S_{m_R(x)+1}\psi(x)$). Daher ist der erste Teil dieses Kapitels nur den analytischen Eigenschaften dieser Funktion gewidmet. Der eigentliche Beweis folgt dann im Abschnitt 6.2.

6.1 Die Laplace–Transformierte der momentenerzeugenden Funktion

Im folgenden seien $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(\alpha)$ und Γ wie in Proposition 3.2 definiert. Für $\alpha \in \Gamma$ setzen wir

$$\gamma(\alpha) := f(\alpha) - \beta(0).$$

Sind φ und $\psi \in \mathcal{H}(X)$ S–unabhängig, so ist Γ ein offenes Intervall, und es existiert die Umkehrabbildung von α, die mit $t : \Gamma \to \mathbb{R}$ bezeichnet wird.

Es sei die Funktion Z_α für $w, s \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$Z_\alpha(s, w) := \int_0^\infty e^{-sR} \left(\int_X e^{(t(\alpha)-iw)(S_{m_R(x)}\varphi(x)+\alpha R)} \, d\mu_{\beta(0)\psi} \right) dR,$$

vorausgesetzt, das Integral existiert.

Die wichtigen analytischen Eigenschaften werden in einer Proposition zusammengefaßt; dabei werden vier Fälle gesondert untersucht:

Proposition 6.1. *Es seien $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_\theta(\mathbb{R})$ S–unabhängig, $\psi < 0$, Γ, t und γ definiert wie oben, ebenso Z_α mit $\alpha \in \Gamma$. Dann gilt:*

(i) Die Funktion Z_α ist stetig in $\{z : \mathfrak{Re}(z) > \gamma(\alpha)\} \times \mathbb{R}$ und für jedes $(s, w) \in \{z : \mathfrak{Re}(z) > \gamma(\alpha)\} \times \mathbb{R}$ ist Z_α als Funktion der ersten Koordinate analytisch in s.

(ii) Es gibt eine Umgebung U von $(\gamma(\alpha), 0)$ in $\mathbb{C}^2$, so daß $Z_\alpha(s, w)$ auf U die Gestalt

$$Z_\alpha(s, w) = \frac{C(s, w, \alpha) \int -\psi \, d\mu_{\beta(0)\psi}}{1 - e^{P((t(\alpha)-iw)(\varphi-\alpha\psi)+(s+\beta(0))\psi)}} + J_\alpha(s, w)$$

hat; dabei sind die Funktion $C_\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, gegeben durch $C_\alpha(s, w) := C(s, w, \alpha)$, und $J_\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ stetig in U, und für jedes $(s, w) \in U$ ist J_α analytisch als Funktion der ersten Koordinate in s. Es ist $C(\alpha) := C(\gamma(\alpha), 0, \alpha) \neq 0$ (die Funktion $C(s, w, \alpha)$ wird später explizit in (6.6.3) definiert werden).

(iii) Die Funktion Z_α ist stetig in einer Umgebung V von $\{z : \mathfrak{Re}(z) = \gamma(\alpha), z \neq \gamma(\alpha)\} \times \{0\}$ und für jedes $(s, w) \in V$ ist Z_α als Funktion der ersten Koordinate analytisch in s.

(iv) Für jedes $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Umgebung W von $\{z : \mathfrak{Re}(z) = \gamma(\alpha)\} \times \{w\}$, so daß Z_α stetig in W ist und, für jedes $(s, t) \in W$ ist Z_α als Funktion der ersten Koordinate analytisch in s.

Für jede nicht leere kompakte Teilmenge $K \subset \Gamma$ lassen sich die offenen Mengen U', V', W' derart wählen, daß für alle $\alpha \in J$ die Aussagen (ii)-(iv) für die Wahl der Mengen $U := U' + \{(\gamma(\alpha), 0)\}$, $V := V' + \{(\gamma(\alpha), 0)\}$ und $W := W' + \{(\gamma(\alpha), w)\}$ bestehen bleiben; (für $A, B \subset \mathbb{C}^2$ bezeichnet $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$).

Beweis ad (i). Zur Abkürzung sei $t := (t(\alpha) - iw)$ gesetzt. Man rechnet zunächst ohne Rücksicht auf das Konvergenzverhalten wie folgt:

$$\int_0^\infty e^{-sR}\left(\int_X e^{S_{m_R(x)}t\varphi(x)+t\alpha R}\,d\mu_{\beta(0)\psi}\right)\,dR$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_X e^{(t\alpha-s)R}\sum_{n=0}^\infty \mathbf{1}_{\{-S_n\psi(x)\le R<-S_{n+1}\psi(x)\}}\,e^{S_nt\varphi(x)}\,d\mu_{\beta(0)\psi}\,dR\\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_X e^{S_nt\varphi(x)}\int_{-S_n\psi(x)}^{-S_{n+1}\psi(x)} e^{(t\alpha-s)R}\,dR\,d\mu_{\beta(0)\psi}\\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_X e^{S_nt\varphi(x)}e^{(s-t\alpha)S_n\psi(x)}\underbrace{\int_0^{-\psi(S^n(x))} e^{(t\alpha-s)R}\,dR}_{=:\,B_1(S^n(x),s,t,\alpha)}\,d\mu_{\beta(0)\psi}\\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_X e^{S_n(t\varphi+(s-t\alpha)\psi)(x)}B_1(S^n(x),s,t,\alpha)h_{\beta(0)\psi}(x)\,d\nu_{\beta(0)\psi}\\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_X \mathcal{L}^n_{\beta(0)\psi}\left(e^{S_n(t\varphi+(s-t\alpha)\psi)}B_1(S^n(\cdot),s,t,\alpha)h_{\beta(0)\psi}\right)\,d\nu_{\beta(0)\psi}\\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_X B_1(x,s,t,\alpha)\,(\mathcal{L}^n_{t\varphi+(s-t\alpha+\beta(0))\psi}(h_{\beta(0)\psi}))\,(x)\,d\nu_{\beta(0)\psi}. \qquad (6.6.1)
\end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus der Anmerkung 2.7. Man fasse die letzte Summe (6.6.1) als Definition von $Z_\alpha(s,w)$ auf. Zur Abkürzung setze man

$$b(s,w,\alpha) := (t(\alpha)-iw)\varphi + (s-\alpha(t(\alpha)-iw)+\beta(0))\psi.$$

Aufgrund der Proposition 2.9 (iii) gibt es bei festem (s,w,α) ein $\delta > 0$, das nur von s und α abhängt, so daß wir für die Summe (6.6.1) folgende gleichmäßige Abschätzung erhalten:

$$\sum_{n=0}^\infty \left|\int_X B_1(x,s,t,\alpha)\,(\mathcal{L}^n_{t\varphi+(s-t\alpha+\beta(0))\psi}(h_{\beta(0)\psi}))\,(x)\,d\nu_{\beta(0)\psi}\right| \le$$

$$\begin{aligned}
&\le \|B(\cdot,s,t(\alpha)-iw,\alpha)\|_\infty \left\|h_{\beta(0)\psi}\right\|_\infty \sum_{n=0}^\infty \left\|\mathcal{L}_{\mathfrak{Re}\,b(s,w,\alpha)}1\right\|_\infty\\
&\le \|B(\cdot,s,t(\alpha)-iw,\alpha)\|_\infty \left\|h_{\beta(0)\psi}\right\|_\infty \sum_{n=0}^\infty e^{nP(\mathfrak{Re}\,b(s,w,\alpha))}(1+\delta^n).
\end{aligned}$$

Die letzte Summe ist endlich, solange $P(\mathfrak{Re}(b(s,w,\alpha))) < 0$ ist; das gilt wiederum wegen der Monotonie des Drucks bezüglich $\mathfrak{Re}(s)$, für $\mathfrak{Re}(s) > \gamma(\alpha)$ (vgl. Propostion 2.5). Somit ist Z_α für alle $(s,w) \in \{z : \mathfrak{Re}(z) > \gamma(\alpha)\} \times \mathbb{R}$ und beliebiges $\alpha \in \Gamma$ als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten (auf Halbebenen rechts von $\gamma(\alpha)$) Reihe stetiger Funktionen selber stetig und bezüglich der ersten Koordinate analytisch als Grenzwert einer lokal gleichmäßig konvergenten

Reihe analytischer Funktionen, wobei man der Bemerkung 2.13 entnimmt, daß die Reihenglieder analytische Funktionen der ersten Koordinate sind. □

Beweis ad (ii). Die Proposition 2.14 (i) erlaubt uns, eine Umgebung von $(\gamma(\alpha), 0)$ in $\mathbb{C}^2$ und ein $\delta_1 > 0$ so zu wählen, daß für alle (s, w) aus dieser Umgebung und $n \to \infty$ gilt

$$(1+\delta_1)^n \left\| \frac{\mathcal{L}^n_{b(s,w,\alpha)}(h_{\beta(0)\psi})}{\exp(nP(b(s,w,\alpha)))} - h_{b(s,w,\alpha)} \int h_{\beta(0)\psi}\, d\nu_{b(s,w,\alpha)} \right\|_\theta \to 0. \tag{6.6.2}$$

Wir wenden jetzt auf die Darstellung (6.6.1) von $Z_\alpha(s,w)$ die Eigenschaft (6.6.2) an, indem wir wie folgt rechnen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X B_1(x,s,t,\alpha)\, (\mathcal{L}^n_{b(s,w,\alpha)}(h_{\beta(0)\psi}))\,(x)\, d\nu_{\beta(0)\psi} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_X B_1(\cdot,s,t,\alpha) \left(\frac{(\mathcal{L}^n_{b(s,w,\alpha)}(h_{\beta(0)\psi}))}{\exp nP(b(s,w,\alpha))} - h_{b(s,w,\alpha)} \int h_{\beta(0)\psi}\, d\nu_{b(s,w,\alpha)} \right.\\
&\qquad \left. + h_{b(s,w,\alpha)} \int h_{\beta(0)\psi}\, d\nu_{b(s,w,\alpha)} \right) \exp nP(b(s,w,\alpha))\, d\nu_{\beta(0)\psi}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_X B_1(\cdot,s,t,\alpha) \left(\frac{(\mathcal{L}^n_{b(s,w,\alpha)}(h_{\beta(0)\psi}))}{\exp nP(b(s,w,\alpha))} - h_{b(s,w,\alpha)} \int h_{\beta(0)\psi}\, d\nu_{b(s,w,\alpha)} \right)\\
&\qquad \times \exp nP(b(s,w,\alpha))\, d\nu_{\beta(0)\psi} + \frac{C(s,w,\alpha) \int -\psi\, d\mu_{\beta(0)\psi}}{1-\exp(P(b(s,w,\alpha)))};
\end{aligned}$$

dabei ist $C(s,w,\alpha)$ gegeben durch

$$C_\alpha(s,w) = C(s,w,\alpha) := \frac{\int B_1(x,s,t(\alpha)-iw,\alpha)\, h_{b(s,w,\alpha)}(x)\, d\nu_{\beta(0)\psi} \ \int h_{\beta(0)\psi}\, d\nu_{b(s,w,\alpha)}}{\int -\psi\, d\mu_{\beta(0)\psi}}. \tag{6.6.3}$$

Die Summe stellt mit Blick auf das Konvergenzverhalten in (6.6.2) eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger (bzw. in der ersten Koordinate analytischer) Funktion in einer Umgebung von $(\gamma(\alpha), 0)$ in $\mathbb{C}^2$ dar. Das in dieser Umgebung definierte Grenzelement wird mit J_α bezeichnet. Damit haben wir bewiesen, daß für (s,w) aus dieser Umgebung gilt

$$Z_\alpha(s,w) = \frac{C(s,w,\alpha) \int -\psi\, d\mu_{\beta(0)\psi}}{1-\exp(P(b(s,w,\alpha)))} + J_\alpha(s,w).$$

Mit einem Standardargument aus der Pertubationstheorie erhält man, daß C_α in einer Umgebung von $(\gamma(\alpha), 0)$ stetig ist und als Funktion der ersten Koordinate analytisch in s für (s, w) aus dieser Umgebung. Schließlich erhalten wir, wie gefordert, für alle $\alpha \in \Gamma$, daß

$$\begin{aligned} C(\alpha) &:= C(\gamma(\alpha), 0, \alpha) \qquad (6.6.4) \\ &= \frac{\int B_1(x, \gamma(\alpha), t(\alpha), \alpha)\, h_{b(\gamma(\alpha),0,\alpha)}(x)\, d\nu_{\beta(0)\psi} \int h_{\beta(0)\psi}\, d\nu_{b(\gamma(\alpha),0,\alpha)}}{\int -\psi\, d\mu_{\beta(0)\psi}} > 0. \end{aligned}$$

□

Beweis ad (iii). Es sei $t \neq 0$. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Zunächst sei

$$b(\gamma(\alpha) + it, 0, \alpha) \in \mathbf{F}_\theta(\mathbb{C}),$$

i.e., $\mathfrak{Im}(b(\gamma(\alpha) + it, 0, \alpha)) = t\psi \sim M + d$ für ein $d \in [0, 2\pi)$ und $M \in \mathcal{C}(X, 2\pi\mathbb{Z})$. Da φ und ψ nach Voraussetzung S–unabhängig sind, ist notwendig $d \neq 0$. Indem man wie im Beweis von Teil (ii) wieder Proposition 2.14 (i) anwendet, sieht man, daß es eine Umgebung $U_2 \subset \mathbb{C}^2$ von $(\gamma(\alpha) + it, 0)$ gibt, so daß für alle $(s, w) \in U_2$

$$Z_\alpha(s, w) = \frac{C(s, w, \alpha) \int -\psi\, d\mu_{\beta(0)\psi}}{1 - \exp(P(b(s, w, \alpha)))} + J_{1,\alpha}(s, w),$$

wobei die Funktionen $J_{1,\alpha}$ und C_α stetig in U_2 sind und für alle $(s, w) \in U_2$ analytisch in s als Funktion der ersten Koordinate; dabei ist $C_\alpha(s, w) = C(s, w, \alpha)$ definiert wie in (6.6.3). Da nun $P(b(\gamma(\alpha) + it, 0, \alpha)) = d \neq 0$ ist, ist –wegen der Stetigkeit des Drucks– auch $P(b(s, w, \alpha)) \neq 0$ für alle (s, w) aus einer Umgebung von $(\gamma(\alpha) + it, 0)$, so daß für alle (s, w) aus dieser Umgebung Z_α selbst stetig und analytisch in s bezüglich der ersten Koordinate ist.

Wir untersuchen nun den Fall

$$b(\gamma(\alpha) + it, 0, \alpha) \in \mathbf{I}_\theta(\mathbb{C}).$$

Vermöge Proposition 2.9 (iv) gibt es ein $\eta \in (0, 1)$, so daß

$$\rho(\mathcal{L}_{b(\gamma(\alpha)+it,0,\alpha)}) \leq 1 - \eta.$$

Wegen der oberen Halbstetigkeit der Abbildung ρ von $\mathcal{F}_\theta(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$, die gegeben ist durch die Abbildungsvorschrift $g \mapsto \rho(\mathcal{L}_g)$, gibt es eine Umgebung U_3 von $(\gamma(\alpha) + it, 0)$, so daß für alle $(s, w) \in \bar{U}_3$ und für ein $\tilde{\eta} \in (\eta, 1)$ gilt

$$\rho(\mathcal{L}_{b(s,w,\alpha)}) \leq 1 - \tilde{\eta};$$

($\bar{U}_3$ bezeichnet wie oben den Abschluß von U_3). Wieder vermöge Proposition 2.9 (iv) sieht man, daß die kompakte Menge

$$\left\{b(s,w,\alpha) : (s,w) \in \bar{U}_3\right\}$$

eine Teilmenge von $\mathbf{I}_\theta(\mathbb{C})$ ist. Darum findet man vermöge Proposition 2.14 (ii) ein $\delta_2 > 0$, so daß für alle $(s,w) \in \bar{U}_3$ und für $n \to \infty$ gilt:

$$(1+\delta_2)^n \left\| \frac{\mathcal{L}^n_{b(s,w,\alpha)} h_{\beta(0)\psi}}{\exp(nP(\mathfrak{Re}\, b(s,w,\alpha)))} \right\|_\theta \to 0.$$

Es ist $P(\mathfrak{Re}(b(\gamma(\alpha)+it,0,\alpha)) = P(t(\alpha)\varphi + \beta(t(\alpha))\psi) = 0$, so daß man mit Blick auf (6.6.1) sieht, daß wieder Z_α in (s,w) aus einer Umgebung von $(\gamma(\alpha)+it,0)$ stetig und für alle (s,w) aus dieser Umgebung analytisch in s bezüglich der ersten Koordinate ist.

Insgesamt erhält man also, daß Z_α in einer Umgebung von $\{z : \mathfrak{Re}(z) = \gamma(\alpha), z \neq \gamma(\alpha)\} \times \{0\}$ stetig und analytisch in s bezüglich der ersten Koordinate für alle (s,w) aus dieser Umgebung ist. □

Beweis ad (iv). Es sei $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Wieder haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Zunächst nehmen wir an, daß

$$b(\gamma(\alpha)+it,w,\alpha) \in \mathbf{F}_\theta(\mathbb{C})$$

sei, i.e., $\mathfrak{Im}(b(\gamma(\alpha)+it,w,\alpha)) = -w\varphi + (w\alpha+t)\psi \sim M + d$ für ein $M \in \mathcal{C}(X, 2\pi\mathbb{Z})$ und $d \in [0,2\pi)$. Aus der S–Unabhängigkeit von φ und ψ folgt wieder notwendig $d \neq 0$. Also finden wir –wie beim Beweis von Teil (ii)– eine Umgebung $U_4 \subset \mathbb{C}^2$ von $(\gamma(\alpha)+it,w)$, wo für alle $(s,w) \in U_4$ gilt, daß $P(b(s,w,\alpha)) \neq 0$, und

$$Z_\alpha(s,w) = \frac{C(s,w,\alpha)\int -\psi\, d\mu_{\beta(0)\psi}}{1-\exp(P(b(s,w,\alpha)))} + J_{2,\alpha}(s,w);$$

dabei hat, analog zum Beweis von Teil (ii), $J_{2,\alpha}$ in der Umgebung U_4 die geforderten Eigenschaften, und folglich gilt dies auch für Z_α.

Wir untersuchen nun wieder den Fall

$$b(\gamma(\alpha)+it,w,\alpha) \in \mathbf{I}_\theta(\mathbb{C})$$

Analog zu dem Beweis von (iii), findet man eine abgeschlossene Umgebung $\bar{U}_5$ von $(\gamma(\alpha)+it,w)$, so daß die kompakte Menge

$$\{b(s,v,\alpha) : (s,v) \in \bar{U}_5\}$$

ganz in $\mathbf{I}_\theta(\mathbb{C})$ enthalten ist. Die Analytizität von $Z_\alpha(s,w)$ in einer Umgebung von $(\gamma(\alpha)+it, w)$ folgt dann wieder mit Proposition 2.14 (ii).

Die Kombination dieser beiden Beobachtungen impliziert, daß für jedes $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Funktion Z_α die geforderten Eigenschaften in einer Umgebung von $\{z : \mathfrak{Re}(z) = \gamma(\alpha)\} \times \{w\}$ besitzt. □

Beweis der Gleichmäßigkeit. Es sei $J \subset \Gamma$ ein nicht leeres Kompaktum.

ad (ii): Die Proposition 2.14 (i) erlaubt es, eine offene Umgebung U von $(0,0)$ in $\mathbb{C}^2$ und ein $\delta_1 > 0$ derart klein zu wählen, daß der Satz bei dieser Wahl für alle $\alpha \in J$ gültig ist.

ad (iii) & (iv): Im Beweis von (iii) und (iv) werden jeweils zwei Fälle unterschieden. Der erste Fall beruht wie bei (ii) wieder auf der Proposition 2.14 (i), so daß man für Teil (iii) (Teil (iv) ist ganz analog zu behandeln) U_1' einheitlich wählen kann, um dem Satz mit $U = U_1' + \{(\gamma(0), 0)\}$ zu genügen. Im zweiten Fall kann man wegen der Oberhalbstetigkeit der Abbildung $\rho : \mathcal{F}_\theta(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $g \mapsto \rho(g)$, wieder U_2' und $\eta \in (0,1)$ unabhängig von $\alpha \in J$ wählen, so daß auch dieser Teil des Arguments mit $U = U_2' + \{\gamma(0), 0\}$ richtig bleibt; beides zusammengenommen liefert das gewünschte Resultat. □

Um Z_α nun letztlich auf die Form des Korollars 6.4 zu bringen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 6.2. *Es gibt eine wohldefinierte Funktion $s : \mathbb{R} \times \Gamma \to \mathbb{C}$, so daß für alle $\alpha \in \Gamma$die Funktion $s(\cdot, \alpha)$ reell–analytisch in $(-\epsilon\,\epsilon)$ ($\epsilon > 0$ hinreichend klein) ist und daß für $|w| < \epsilon$ der Punkt $(s(w,\alpha), w)$ der einzige einfache Pol von Z_α in einer Umgebung von $(\gamma(\alpha), 0)$ ist. Für die Funktion s gilt:*

(i) $\dfrac{\partial}{\partial w}\mathfrak{Re}\, s(w,\alpha)|_{w=0} = 0.$

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial w}\mathfrak{Im}\, s(w,\alpha)|_{w=0} = 0.$

(iii) $\dfrac{\partial^2}{\partial w^2}\mathfrak{Re}\, s(w,\alpha)|_{w=0} = -\beta''(t(\alpha)) < 0.$

(iv) $\dfrac{\partial^2}{\partial w^2}\mathfrak{Im}\, s(w,\alpha)|_{w=0} = 0.$

(v) *$\mathfrak{Re}\, s(w, \alpha)$ ist eine gerade Funktion in w.*

(vi) *Es gibt eine Umgebung $\tilde{U}$ von $\{s : \mathfrak{Re}(s) \geq \gamma(\alpha)\} \times \{0\}$, so daß $Z_\alpha(s, w)$ dort keine Pole außer $s(w, \alpha)$ hat.*

Für den Beweis dieses Lemmas verweisen wir auf die vollständig analoge Situation in [Wad96, Lemma 3].

Notation 6.3. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir

$$C(w, \alpha) := C(s(w, \alpha), w, \alpha) \frac{\int -\psi \, d\mu_{\beta(0)\psi}}{\int -\psi \, d\mu_{b(s(w,\alpha),w,\alpha)}}.$$

Lemma 6.2, Proposition 6.1 (ii) und die Tatsache, daß

$$\lim_{s \to s(w,\alpha)} \frac{1 - e^{P(b(s,w,\alpha))}}{s - s(w, \alpha)} = -\frac{\partial}{\partial s} P(s(w, \alpha), w, \alpha) = \int -\psi \, d\mu_{b(s(w,\alpha),w,\alpha)}$$

gilt, führt zu dem folgenden Resultat.

Korollar 6.4. *Es sei $J \subset \Gamma$ nicht leer und kompakt. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}^2$ von $\{z : \mathfrak{Re}(z) \geq 0\} \times \{0\}$, so daß es für alle $\alpha \in J$ eine Funktion $J_{5,\alpha}$ gibt, die für alle $(s, w) \in U + (\gamma(\alpha), 0)$ stetig und als Funktion der ersten Koordinate analytisch in s ist, und es gilt*

$$Z_\alpha(s, w) = \frac{C(w, \alpha)}{s - s(w, \alpha)} + J_{5,\alpha}(s, w).$$

Anmerkung 6.5. Es gilt insbesondere, daß

$$\frac{\int -\psi \, d\mu_{\beta(0)\psi}}{\int -\psi \, d\mu_{b(s(0,\alpha),0,\alpha)}} = 1.$$

6.2 Die Fourier–Laplace–Transformierte und Anwendung eines Tauberschen Theorems

Nun folgt der eigentliche Beweis des Theorems 5.2. Der Beweis beruht wesentlich auf einer Anwendung eines Tauberschen Theorems von Katsuda und Sunada [KS90] auf die Funktion $Z_{N,v,\alpha}$ (siehe (6.6.12) für die Definition von $Z_{N,v,\alpha}$). Um die analytischen Eigenschaften dieser Funktion nachzuweisen, werden für die notwendigen Umformungen einige Resultate der Fourieranalysis benötigt. Der Vollständigkeit halber werden die diesbezüglichen Begriffe einleitend bereitgestellt.

Definition 6.6. Mit Δ wird der Raum der $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$–Testfunktionen bezeichnet, d. h., es sei

$$\Delta := \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ (1 + |t|^m) \left| u^{(n)}(t) \right| \right\} < \infty; m, n \geq 0 \right\}.$$

Für $u \in \Delta$ bezeichnet $\hat{u}$ die Fourier–Laplace –Transformierte, die definiert ist für $z \in \mathbb{C}$, durch

$$\hat{u}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} u(t)\, dt;$$

vorausgestzt, das Integral konvergiert.

Anmerkung 6.7. Für $u \in \Delta$ definiert die Abbildungsvorschrift $w \mapsto \hat{u}(iw)$ wieder eine Funktion aus Δ.

Notation 6.8. Mit $\{k_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir die Familie von approximierenden Identitäten mit Fourier–Transformierter

$$\hat{k}_N(iw) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{w^2}{N^2 - w^2}\right) & für\ |w| \leq N, \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Anmerkung 6.9. Die Funktionen k_N liegen in Δ, und es gilt $\hat{k}_N(iw) \to 1$ für $N \to \infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Um das Theorem zu beweisen, wählen wir uns nun eine nicht leere und kompakte Teilmenge $J \subset \Gamma$.

Da sich Indikatorfunktionen kompakter Intervalle durch Funktionen aus Δ gleichmäßig approximieren lassen, ist es für den Beweis des Satzes 5.2 hinreichend, folgende Asymptotik für ein beliebiges nicht–negatives $u \in \Delta$ mit kompaktem Träger zu beweisen:

$$\mathbb{E}\left(u\left(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R\right)\right) \underset{R}{\sim}_{\infty} \frac{C(\alpha)}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}} \hat{u}(-t(\alpha)) \frac{e^{R\gamma(\alpha)}}{\sqrt{R}} \tag{6.6.5}$$

gleichmäßig in $\alpha \in J$; hierbei bezeichnet $\mathbb{E}$ die $\mu_{\beta(0)\psi}$–Erwartung.

Es wird durch

$$H_R^\alpha(t) := \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x \in X : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R \leq t\right\}\right) \tag{6.6.6}$$

eine Verteilungsfunktions auf $\mathbb{R}$ definiert; ihre zugehörige Fourier–Laplace–Transformierte wird erklärt durch

$$\hat{H}_R^\alpha(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\, dH_R(t) = \mathbb{E}\left(e^{z\left(S_{m_R(x)}\varphi(x)+\alpha R\right)}\right). \tag{6.6.7}$$

Mit dieser Verteilungsfunktion erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(u\left(S_{m_R(x)}\varphi(x)+\alpha R\right)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(s)\, dH_R^\alpha(s)\\ &= \frac{C(\alpha)}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}}\frac{e^{R\gamma(\alpha)}}{\sqrt{R}}\int_{-\infty}^{\infty} u(s)e^{-st(\alpha)}\, dq_\alpha^R(s);\end{aligned}$$

wobei das Borel–Maß q_α^R auf $\mathbb{R}$ definiert ist durch

$$dq_\alpha^R(s) := e^{st(\alpha)}\frac{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}}{C(\alpha)}\frac{\sqrt{R}}{e^{R\gamma(\alpha)}}\, dH_R^\alpha(s). \tag{6.6.8}$$

Mit dieser Notation ist die Aussage über die Asymptotik von (6.6.5) äquivalent zu der Aussage, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(s)e^{-st(\alpha)}\, dq_\alpha^R(s) \to \int_{-\infty}^{\infty} u(s)e^{-st(\alpha)}\, ds = \hat{u}(-t(\alpha)) \tag{6.6.9}$$

für $R \to \infty$ gleichmäßig für $\alpha \in J$.

Zum Beweis dieser letzten Aussage benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 6.10 ([Wad96] Lemma 2, [Lal87] Theorem G). *Es seien $(k_N)_{N=1}^\infty$ die in der Notation* 6.8 *definierten approximierenden Identitäten; $J \subset \mathbb{R}$ sei ein abgeschlossenes Intervall. Sei $\left\{m_\alpha^R\right\}_{\alpha\in J;R\geq 1}$ eine Menge von positiven Borel–Maßen auf $\mathbb{R}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:*

(i) Für jedes endliche abgeschlossene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ existiert eine Konstante K_I, so daß

$$\sup_{R\geq 1}\sup_{\alpha\in J}\sup_{t\in\mathbb{R}} m_\alpha^R(I+t) \leq K_I;$$

dabei ist $I + t := \{x + t : x \in I\}$.

(ii) Es gibt eine Familie von positiven Borel–Maßen $\{m_\alpha\}_{\alpha\in J}$ auf $\mathbb{R}$, so daß für jedes $N \geq 1$ und jedes $v \in \Delta$ mit $v \geq 0$ und kompaktem Träger gilt:

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{\alpha\in J}\left|\int (k_N * v)\, dm_\alpha^R - \int (k_N * v)\, dm_\alpha\right| = 0.$$

Es sei $\{u_\alpha\}_{\alpha\in J}$ eine Familie von nicht–negativen Funktionen aus Δ mit kompaktem Träger, so daß durch $\alpha \mapsto u_\alpha$ eine stetig Abbildung in der Δ–Topologie definiert wird. Dann gilt:

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\alpha\in J} \left| \int u_\alpha \, dm_\alpha^R - \int u_\alpha \, dm_\alpha \right| = 0.$$

Für ein nicht–negatives $u \in \Delta$ mit kompaktem Träger definiert $\alpha \mapsto u(s)e^{t(\alpha)s}$, $J \to \Delta$, eine in der Δ–Topologie stetige Abbildung. Darum kann man auf (6.6.9) das Lemma mit $u_\alpha(s) := u(s)e^{t(\alpha)s}$, $m_\alpha^R := q_\alpha^R$ und $m_\alpha := \lambda$ anwenden (λ sei hier das Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}$).

Die Konvergenz in (6.6.9) ist also bewiesen, wenn wir die Bedingungen (i) und (ii) des Lemmas 6.10 mit der Wahl $m_\alpha^R := q_\alpha^R$ und $m_\alpha := \lambda$ überprüft haben.

Wir beginnen mit der Bedingung (ii). Dazu geben wir uns ein festes, nicht negatives $v \in \Delta$ mit kompaktem Träger und ein $N \geq 1$ vor. Unter diesen Voraussetzungen ist die Bedingung (ii) damit gleichbedeutend, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} (k_N * v)(s) \, dq_\alpha^R(s) \to \hat{v}(0) \qquad (R \to \infty)$$

gleichmäßig für $\alpha \in J$ gilt. Mit Blick auf (6.6.8) sieht man, daß dies genau dann erfüllt ist, wenn gleichmäßig für $\alpha \in J$ gilt

$$\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R)\right) \underset{R}{\sim}_{\infty} \frac{\hat{v}(0)C(\alpha)}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}} \frac{e^{R\gamma(\alpha)}}{\sqrt{R}}; \tag{6.6.10}$$

dabei ist

$$v_{N,\alpha}(s) := (k_N * v)(s)e^{t(\alpha)s}. \tag{6.6.11}$$

Diese Aussage wollen wir nun beweisen, indem wir erst die analytischen Eigenschaften der Funktion

$$Z_{N,v,\alpha}(s) := \int_0^\infty e^{-sR}\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R)\right) \, dR \tag{6.6.12}$$

ermitteln und dann mit einem Tauberschen Theorem (und weiteren Betrachtungen) die gewünschte Asymptotik folgern.

Wir beginnen mit den analytischen Eigenschaften der Funktion $Z_{N,v,\alpha}$. Für die folgende Rechnung benötigen wir ein Lemma.

Lemma 6.11. *Für $v \in \Delta$ mit kompaktem Träger, $v \geq 0$, $v_{N,\alpha}$ definiert wie in (6.6.11) und H_R^α definiert wie in (6.6.7) gilt für alle $\alpha \in \Gamma$ und $N \in \mathbb{N}$, daß*

$$\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}\left(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(iw)\hat{k}_N(iw)\hat{H}_R^\alpha(-iw + t(\alpha))\, dw.$$

Beweis. Die Fourierinversionsformel impliziert, daß

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}\left(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R\right)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} v * k_N(s)\, e^{t(\alpha)s}\, dH_R^\alpha(s) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(iw)\hat{k}_N(iw)e^{-iws+t(\alpha)s}\, dw\, dH_R^\alpha(s) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(iw)\hat{k}_N(iw)\hat{H}_R^\alpha(-iw + t(\alpha))\, dw.
\end{aligned}$$

Die Konvergenz der betrachteten Integrale und die Vertauschbarkeit der Integration garantiert die Tatsache, daß der Träger des Maßes $dH_R^\alpha(s)$ und der Träger der Funktion $\hat{k}_N$ für alle $\alpha \in \Gamma$ und $N \in \mathbb{N}$ kompakt ist. □

Wendet man das Lemma 6.11 und die Formel (6.6.7) nun auf $\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R)\right)\, dR$ an, so erhält man für die Funktion $Z_{N,v,\alpha}$.

$$\begin{aligned}
&Z_{N,v,\alpha}(s) = \\
&= \int_0^\infty e^{-sR}\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R)\right)\, dR \\
&= \int_0^\infty e^{-sR}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_N(iw)\hat{v}(iw)\mathbb{E}\left(e^{(-iw+t(\alpha))\left(S_{m_R(x)}\varphi(x)+\alpha R\right)}\right)\, dw\right)\, dR \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_N(iw)\hat{v}(iw)\left(\int_0^\infty e^{-sR}\mathbb{E}\left(e^{(-iw+t(\alpha))\left(S_{m_R(x)}\varphi(x)+\alpha R\right)}\right)\, dR\right)\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\hat{k}_N(iw)\hat{v}(iw)Z_\alpha(s,w)\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\hat{k}_N(iw)\hat{v}(iw)Z_\alpha(s,w)\, dw + H_1(s,\alpha);
\end{aligned} \tag{6.6.13}$$

dabei ist $H_1(s,\alpha)$ vermöge der Proposition 6.1 (iv) analytisch in $\tilde{V} \subset \mathbb{C}$, einer offenen Umgebung von $\{z : \mathfrak{Re}(z) \geq \gamma(\alpha)\}$, wobei $\tilde{V} - \{\gamma(\alpha)\}$ unabhängig von $\alpha \in J$ ist.

Durch Anwendung des Korollars 6.4 auf die Gleichung (6.6.13) erhält man für $s \in \tilde{V}$:

$$Z_{N,v,\alpha}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\hat{k}_N(iw)\hat{v}(iw)C(w,\alpha)}{s - s(w,\alpha)}\, dw + H_2(s,\alpha);$$

dabei ist $H_2(s,\alpha)$ analytisch in $s \in \tilde{V}$.

Auf den Realteil von $s(w,\alpha) - \gamma(\alpha)$ wenden wir die folgende Version des Morse–Lemmas an.

Lemma 6.12 (Katsuda & Sunada [KS90]). *Für ein $\epsilon > 0$ sei $f : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ eine gerade und reell–analytische Funktion mit $f(0) = f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$. Dann gibt es eine invertierbare Funktion $y : (-\epsilon\, \epsilon) \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = 0$, $y(-x) = -y(x)$ und $f(x) = -y(x)^2$.*

Dieses Lemma liefert die Existenz eines $\epsilon' > 0$ und einer invertierbaren Funktion $y : (-\epsilon'\, \epsilon') \times \Gamma \to \mathbb{R}$ (mit Umkehrfunktion w, i.e. $w(y(x,\alpha),\alpha) = x$), so daß

$$\mathfrak{Re}\, s(w,\alpha) = \gamma(\alpha) - y(w,\alpha)^2 \tag{6.6.14}$$

und $y(0,\alpha) = 0$, $y(-w,\alpha) = -y(w,\alpha)$.

In Verbindung mit dem Korollar 6.4 erhält man nun die folgende Darstellung von Z_α.

Korollar 6.13. *Es gibt eine Umgebung $\tilde{U}$ von $\{z : \mathfrak{Re}(z) \geq \gamma(\alpha)\} \times \{0\}$ und eine Funktion $H_{3,\alpha}$, die für alle $(s,w) \in \tilde{U}$ stetig und als Funktion der ersten Koordinat analytisch in s ist, so daß, mit y definiert wie oben und q definiert durch $q(w,\alpha) := \mathfrak{Im}\, s(w,\alpha)$, gilt*

$$Z_\alpha(s,w) = \frac{C(w,\alpha)}{s - \gamma(\alpha) + y(w,\alpha)^2 + iq(w,\alpha)} + H_{3,\alpha}(s,w).$$

Es hängt $\tilde{U} - \{(\gamma(\alpha), 0)\}$ nur von J ab.

Diese Darstellung von Z_α aus Corollar 6.13 setzt man nun in (6.6.13) ein, setzt $Q(y,\alpha) := \mathfrak{Im}\, s(w(y,\alpha),\alpha)$ und führt einen Variablenwechsel durch und erhält so schließlich nach einer Umformung für ein hinreichend klein gewähltes $\epsilon > 0$

$$Z_{N,v,\alpha}(s) = \frac{C(\alpha)\sqrt{2}\hat{v}(0)}{2\pi\sqrt{\beta''(t(\alpha))}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1 + P(y,\alpha)}{s - \gamma(\alpha) + y^2 + iQ(y,\alpha)}\, dy + H_4(s,\alpha); \tag{6.6.15}$$

wobei $H_4(s,\alpha)$ analytisch bezüglich der ersten Koordinate für alle $s \in \tilde{V}$ ist,

$$P(y,\alpha) := \left(\frac{C(w(y,\alpha),\alpha)\, \hat{k}_N(iw(y,\alpha))\hat{v}(iw(w,\alpha))}{C(\alpha)\, \frac{\partial y}{\partial w}(w(y,\alpha),\alpha)} \frac{\sqrt{\beta''(t(\alpha))}}{\sqrt{2}\hat{v}(0)} \right) - 1$$

und $Q(0,\alpha) = Q'(0,\alpha) = Q''(0,\alpha) = 0$ ist.

Zur Abkürzung soll folgendes Fortsetzungskriterium eingeführt werden:

Kriterium 6.14. *Die in $\{s : \mathfrak{Re}(s) > 0\}$ holomorphe Funktion F erfüllt das schwache Fortsetzungkriterium, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} F(\epsilon + it) \tag{6.6.16}$$

für fast alle $t \in \mathbb{R}$ existiert und Element des Sobolev–Raums $W^{1,1}_{loc}$, der lokal integrierbaren Funktionen mit lokal integriebarer erster Ableitung, ist, und es ferner eine lokal integrierbare Funktion $h(t)$ gibt, so daß

$$|F(\epsilon + it)| \leq h(t)$$

für alle $\epsilon > 0$ erfüllt ist.

Auf die Darstellung (6.6.15) kann man nun das folgende Lemma anwenden, um die analytischen Fortsetzungseigenschaften zu untersuchen; eine ähnliche Rechnung findet man im Beweis der Propostion 3.2 in [KS90].

Lemma 6.15. *Wir betrachten die Funktion Y_α, die für $s \in \mathbb{C}$ definiert wird durch*

$$Y_\alpha(s) := \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1 + P_\alpha(y)}{s - \gamma(\alpha) + y^2 + iQ_\alpha(y)}\, dy,$$

wenn der Ausdruck existiert. Es sei $P_\alpha(y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $P_\alpha(0) = 0$ und $Q_\alpha(y) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$Q_\alpha(0) = Q'_\alpha(0) = Q''_\alpha(0) = 0.$$

Die Funktionen P_α, P'_α,Q_α, Q'_α und Q''_αseien alle stetig bezüglich des Index α aus einem kompakten Intervall K. Dann erfüllt F_α, gegeben durch

$$F_\alpha(s) := Y_\alpha(s + \gamma(\alpha)) - \frac{\pi}{\sqrt{s}},$$

das schwache Fortsetzungskriterium 6.14 *gleichmäßig für $\alpha \in K$, d.h. die Konvergenz in (*6.6.16*) ist gleichmäßig in $\alpha \in K$, und $h(t)$ hängt nicht von α ab.*

Dieses Lemma soll zunächst in Verbindung mit dem Teil (i) des folgenden Lemmas auf (6.6.12) angewandt werden; anschließend folgt dann der Beweis des Lemmas 6.15.

Lemma 6.16 (Katsuda & Sunada [KS90]; Waddington [Wad96]). *Es sei $J \subset \mathbb{R}$ kompakt.*

(i) Es sei $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ($g_\alpha(R) := g(\alpha, R)$) mit $g_\alpha(0) = 0$ und g_α nicht fallend für alle $\alpha \in J$. Es sei $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ eine Funktionenfamilie, so daß die Funktionen f_α für alle $\alpha \in J$

holomorph auf $\{s : \mathfrak{Re}(s) > 1\}$ *sind und dort stetig von* $\alpha \in J$ *abhängen. Die Abbildung* $J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \mapsto A_\alpha$, *sei stetig und implizit gegeben durch*

$$f_\alpha(s) = \frac{A_\alpha}{\sqrt{s-1}} - \int_0^\infty e^{-sR} \frac{1}{\sqrt{R}} \, dg_\alpha(R)$$

für alle $\alpha \in J$ *und* s *mit* $\mathfrak{Re}(s) > 1$. *Ferner möge* F_α, *gegeben duch* $F_\alpha(s) := f_\alpha(1+s)$, *das schwache Fortsetzungskriterium* 6.14 *gleichmäßig für* $\alpha \in J$ *erfüllen.*
Dann gilt

$$g_\alpha(R) \; {}_R\!\sim_\infty \; \frac{A_\alpha}{\sqrt{\pi}} e^R$$

gleichmäßig in $\alpha \in J$.

(ii) Es sei $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig und* $g_\alpha(R) := g(\alpha, R)$ *nicht negativ für alle* $\alpha \in J$. *Es sei* $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *eine Funktionenfamilie, so daß die Funktionen* $f_\alpha(s)$ *holomorph auf* $\{s : \mathfrak{Re}(s) > 1\}$ *für alle* $\alpha \in J$ *sind und dort stetig von* $\alpha \in J$ *abhängen; die Abbildung* $\alpha \mapsto A_\alpha$, $J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *sei stetig und so, daß*

$$f_\alpha(s) = \frac{A_\alpha}{\sqrt{s-1}} - \int_0^\infty e^{-sR} \, dg_\alpha(R)$$

für alle $\alpha \in J$ *und* s *mit* $\mathfrak{Re}(s) > 1$ *gilt. Ferner möge* $f_\alpha(1+s)$ *das Kriterium* 6.14 *gleichmäßig für* $\alpha \in J$ *erfüllen.*
Dann gilt

$$g_\alpha(R) = \mathcal{O}_R^\infty \left(\frac{e^R}{\sqrt{R}} \right)$$

gleichmäßig für $\alpha \in J$.

Als wichtiges Zwischenergebnis erhalten wir, indem wir das in Lemma 6.16 Teil (i) geforderte Fortsetzungsverhalten von f_α, gegeben durch $f_\alpha(s) := \frac{C(\alpha)\hat{v}(0)}{\sqrt{2\beta''(t(\alpha))}\sqrt{s-1}} - Z_{N,v,\alpha}(s + \gamma(\alpha) - 1)$, mit Hilfe des Lemmas 6.15 folgern, als Resultat, daß

$$\int_0^R \sqrt{\tilde{R}} e^{(-\gamma(\alpha)+1)R} \mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}(S_{m_{\tilde{R}}(x)}\varphi(x) + \alpha\tilde{R}) \right) \, d\tilde{R} \; {}_R\!\sim_\infty \; \frac{C(\alpha)\hat{v}(0)}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}} e^R \tag{6.6.17}$$

gleichmäßig für $\alpha \in J$ gilt.

Beweis des Lemmas 6.15. Die Funktion F_α, die gegben ist durch

$$F_\alpha(s) := Y_\alpha(s+\gamma(\alpha)) - \frac{\pi}{\sqrt{s}} := \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1+P_\alpha(y)}{s+y^2+iQ_\alpha(y)}\,dy - \frac{\pi}{\sqrt{s}},$$

läßt sich auf einer Umgebung von $\{s : \mathfrak{Re}(s) \geq 0\} \setminus \{0\}$ holomorph fortsetzen. Es gilt also, daß der Grenzwert $\lim_{\delta\searrow 0} F(it+\delta)$ für $t \neq 0$ existiert, differenzierbar ist und außerhalb einer Umgebung von 0 durch eine lokalintegrierbare Funktion beschränkt wird. Man untersucht nun die Stelle $t = 0$, indem man das Integral in vier Summanden wie folgt aufspaltet:

$$\begin{aligned} F_\alpha(s) \quad = \quad & \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{s+y^2}\,dy - \frac{\pi}{\sqrt{s}}}_{=: J_{\alpha,1}(s)} + \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{P'_\alpha(0)y}{s+y^2}\,dy}_{=: J_{\alpha,2}(s)} \\ & + \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{P_\alpha(y)-P'_\alpha(0)y}{s+y^2}\,dy}_{=: J_{\alpha,3}(s)} + \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1+P_\alpha(y)}{s+y^2+iQ_\alpha(y)} - \frac{1+P_\alpha(y)}{s+y^2}\,dy}_{=: J_{\alpha,4}(s)}. \end{aligned}$$

Wir werden nun die schwache Fortsetzungseigenschaft für jeden einzelnen Summanden nachweisen. Für den ersten Summanden gilt

$$\begin{aligned} J_{\alpha,1}(s) &= 2\int_0^{\epsilon} \frac{1}{s+y^2}\,dy - \frac{\pi}{\sqrt{s}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{s}} \arctan\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{s}}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{s}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{s}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{s}}{\epsilon}\right)\right) - \frac{\pi}{\sqrt{s}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{s}} \arctan\left(\frac{\sqrt{s}}{\epsilon}\right), \end{aligned}$$

und dieser erfüllt somit die schwache Fortsetzungseigenschaft.

Offensichtlich ist $J_{\alpha,2}(it+\delta) = 0$ und $\frac{d}{dt}J_{\alpha,2}(it+\delta) = 0$, für alle $\delta > 0$.

Da $yP'_\alpha(0) - P_\alpha(y) = \mathcal{O}_y^0(y^2)$ (gleichmäßig in $\alpha \in K$), folgt mit einer Konstanten C_1, daß

$$|J_{\alpha,3}(it+\delta)| \leq C_1 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{y^2}{\sqrt{t^2+(\delta+y^2)^2}}\,dy \leq C_1\, 2\epsilon.$$

Der vierte Summand wird nochmals in zwei Summanden wie folgt aufgespalten:

$$\begin{aligned} J_{\alpha,4}(s) &= \underbrace{-i\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{P_\alpha(y)Q_\alpha(y)+Q_\alpha(y)-Q_\alpha'''(0)y^3}{(s+y^2+iQ_\alpha(y))(s+y^2)}\,dy}_{=:\,J_{\alpha,4}^1(s)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{-iQ_\alpha'''(0)y^3}{(s+y^2+iQ_\alpha(y))(s+y^2)}\,dy}_{=:\,J_{\alpha,4}^2(s)}. \end{aligned}$$

Da $P_\alpha(y)Q_\alpha(y)+Q_\alpha(y)-Q_\alpha'''(0)y^3 = \mathcal{O}_y^0(y^4)$ gilt, schätzt man den ersten Summanden mit einer Konstanten C_2 wie folgt ab:

$$\left|J_{\alpha,4}^1(it+\delta)\right| \le C_2\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{y^4}{\sqrt{((t+Q_\alpha(y))^2+(\delta+y^2)^2)}\sqrt{(t^2+(\delta+y^2)^2)}}\,dy \le C_2\,2\epsilon.$$

Da $Q_\alpha(y) = O_y^0(y^3)$ ist, erhält man für den zweiten Summanden mit Konstanten C_3 und C_4:

$$\begin{aligned} &\left|J_{\alpha,4}^2(it+\delta)\right| \\ &= \left|\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{Q_\alpha'''(0)y^3}{(it+\delta+y^2+iQ_\alpha(y))(it+\delta+y^2)} - \frac{Q_\alpha'''(0)y^3}{(it+\delta+y^2)^2}\,dy + \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{Q_\alpha'''(0)y^3}{(it+\delta+y^2)^2}\,dy}_{=0}\right| \\ &\le C_3\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\left|Q_\alpha'''(0)y^3Q_\alpha(y)\right|}{y^6} \le C_4. \end{aligned}$$

Man bemerke, daß alle Konstanten unabhängig von t, α und $\delta > 0$ sind, so daß der Grenzwert (6.6.16) gleichmäßig in α existiert, und es eine lokal integrierbare Funktion $h(t)$ gibt, die für $\delta > 0$ $|F_\alpha(it+\delta)|$majorisiert. Und der geforderte Grenzwert $\delta \searrow 0$ existiert im distributiven Sinne. Ebenso zeigt man, daß die Ableitung von F_α im distributiven Sinne existiert. Man sieht, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$

$$\int_{-\eta}^{\eta}\left|\frac{d}{dt}F_\alpha(it+\delta)\right|\,dt < \infty,$$

indem man diese Abschätzung einzeln für die Aufspaltung $F_\alpha(s) = J_{\alpha,1}(s)+J_{\alpha,2}(s)+J_{\alpha,3}(s)+J_{\alpha,4}(s)$ nachrechnet. Daraus folgt, da im distributiven Sinn e

$$\lim_{\delta\searrow 0}\frac{d}{dt}F_\alpha(it+\delta) = \frac{d}{dt}\lim_{\delta\searrow 0}F_\alpha(it+\delta)$$

gilt, daß die Ableitung im distributiven Sinne existiert und lokal integrierbar ist. $\square$

Unser Ziel ist es nun mit Hilfe der bewiesenen Asymptotik (6.6.17) die Asymptotik (6.6.10) zu folgern. Hierfür benötigen wir die folgende Proposition.

Proposition 6.17. *Es sei $J \subset \mathbb{R}$ kompakt, $g : J \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion. Die Funktion g_α, definiert durch $g_\alpha(t) := g(\alpha, t)$, sei in $\mathcal{C}^1$ und so, daß g'_α lokal Lipschitz ist, i.e., es gibt eine Familie von Funktionen $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ und ein $\delta > 0$, so daß für alle $t \in [0, \infty)$ und alle $s \in (t, t + \delta)$ gilt*

$$\left|g'_\alpha(t) - g'_\alpha(s)\right| \leq G_\alpha(t)\, |t - s| \,.$$

Für diese Funktionen möge gleichmäßig in $\alpha \in J$ gelten:

$$G_\alpha(t) = \mathcal{O}_t^\infty(e^t). \tag{6.6.18}$$

Ferner gebe es eine stetige Funktion $A_{(\cdot)} : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \mapsto A_\alpha$, so daß gleichmäßig für alle $\alpha \in J$ gilt

$$g_\alpha(t) \ {}_t\!\sim_\infty \ A_\alpha e^t. \tag{6.6.19}$$

Dann folgt, daß

$$g'_\alpha(t) \ {}_t\!\sim_\infty \ A_\alpha e^t.$$

Anmerkung 6.18. Die Bedingung 6.6.18 läßt sich insbesondere dann erfüllen, wenn $g_\alpha(x) \in \mathcal{C}^2$ ist, so daß $g''_\alpha(t) = \mathcal{O}_t^\infty(e^t)$ gleichmäßig in $\alpha \in J$ gilt.

Beweis. Es sei $\delta > 0$ gemäß der Bedingungen des Satzes 6.17 gewählt. Da $g_\alpha \in \mathcal{C}^1$ ist, gibt es gemäß des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für alle $t \in [0, \infty)$ ein $\theta \in (0, 1)$, so daß

$$g_\alpha(t + \delta) - g_\alpha(t) - \delta g'_\alpha(t + \theta\delta) = 0$$

ist. Mit dieser Wahl von θ erhält man :

$$\left|g_\alpha(t + \delta) - g_\alpha(t) - \delta g'_\alpha(t)\right| \leq \delta \left|g'_\alpha(t) - g'_\alpha(t + \theta\delta)\right| \leq \delta^2 G_\alpha(t).$$

Daraus folgt weiter:

$$\left|\frac{g'_\alpha(t)}{e^t} - A_\alpha\right| \leq \delta\frac{G_\alpha(t)}{e^t} + \left|\delta^{-1}\left(\frac{g_\alpha(t+\delta)}{e^t} - \frac{g_\alpha(t)}{e^t}\right) - A_\alpha\right|.$$

Unter Verwendung der Bedingungen 6.6.18 und 6.6.19 erhält man

$$\limsup_{t\to\infty}\left|\frac{g'_\alpha(t)}{e^t} - A_\alpha\right| \leq K\delta + A_\alpha\left|\frac{e^\delta - 1}{\delta} - 1\right|$$

gleichmäßig in $\alpha \in J$, für alle $\delta > 0$. Da die rechte Seite der Ungleichung für $\delta \searrow 0$ verschwindet, folgt die Proposition. □

Wir benötigen diese letzte Proposition in der leicht abgewandelten Form des folgenden Korollars.

Korollar 6.19. *Es sei $J \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : J \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion. Man betrachte*

$$F_\alpha(R) := \int_0^R \sqrt{t} f(\alpha,t)\, dt.$$

Die Funktion f_α, gegeben durch $f_\alpha(t) := f(\alpha,t)$, sei lokal Lipschitz, d. h., es gibt eine Familie von Funktionen $\{L_\alpha\}_{\alpha\in J}$ und ein $\delta > 0$, so daß für alle $t \in [0,\infty)$ und für alle $s \in (t, t+\delta)$ gilt

$$|f_\alpha(t) - f_\alpha(s)| \leq L_\alpha(t)\,|t-s|\,.$$

Für diese Funktionen möge gleichmäßig in $\alpha \in J$ gelten:

$$L_\alpha(t) = \mathcal{O}_t^\infty\left(\frac{e^t}{\sqrt{t}}\right) \;\; und \;\; f_\alpha(t) = \mathcal{O}_t^\infty\left(\frac{e^t}{\sqrt{t}}\right). \tag{6.6.20}$$

Ferner gebe es eine stetige Funktion $A_{(\cdot)} : J \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\alpha \mapsto A_\alpha$, so daß gleichmäßig für alle $\alpha \in J$ gilt

$$F_\alpha(t) \;\; {}_t\!\sim_\infty \;\; A_\alpha e^t.$$

Dann folgt gleichmäßig für alle $\alpha \in J$, daß

$$f_\alpha(t) \;\; {}_t\!\sim_\infty \;\; A_\alpha\frac{e^t}{\sqrt{t}}.$$

Beweis. Man wendet die vorhergehenden Proposition 6.17 an, wobei man $g_\alpha(s) = F_\alpha(s)$ setzt und ausnutzt, daß gilt

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{t} f_\alpha(t) - \sqrt{s} f_\alpha(s)| &\leq \sqrt{t}|f_\alpha(t) - f_\alpha(s)| + |\sqrt{t} - \sqrt{s}||f_\alpha(s)| \\
&\leq \underbrace{\left(\sqrt{t} L_\alpha(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} \sup_{x \in (t, t+\delta)} f_\alpha(x)\right)}_{= \mathcal{O}_t^\infty (e^t)} |t - s|.
\end{aligned}
$$

□

Mit Hilfe des Korollars 6.19 wollen wir nun aus der Asymptotik (6.6.17) die gewünschte Asymptotik (6.6.10) folgern. Dazu müssen wir die Ordnung von $e^{(1-\gamma(\alpha))R}\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R)\right)$ und ihrer lokalen Lipschitz–Funktion bestimmen, um (6.6.20) nachzuweisen. Man schätzt den Betrag der lokalen Lipschitz–Funktion wie folgt ab: Für $s \in (t, t + \delta)$ gilt
$\left|e^{(1-\gamma(\alpha))s}\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}(S_{m_s(x)}\varphi(x) + \alpha s)\right) - e^{(1-\gamma(\alpha))t}\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}(S_{m_t(x)}\varphi(x) + \alpha t)\right)\right| \leq$

$$
\leq \quad K e^{(1-\gamma(\alpha))t}\mathbb{E}\left(w_{N,\alpha}(S_{m_s(x)}\varphi(x) + \alpha s)\right) |s - t| \,;
$$

wobei K eine positive Konstante ist, die nur von J, N und der Wahl von δ abhängt; ferner ist dabei $w_{N,\alpha} \in \Delta$ eine Funktion, für deren Fourier–Transformierte gilt

$$
\operatorname{supp}(x \mapsto \hat{w}_{N,\alpha}(ix)) = [-N, N].
$$

Andererseits erhält man durch partielle Integration, daß
$\displaystyle\int_0^\infty e^{-sR}\, de^{(-\gamma(\alpha)+1)R}\mathbb{E}\left(w_{N,\alpha}(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R)\right) =$

$$
= s \int_0^\infty e^{-sR} e^{(-\gamma(\alpha)+1)R}\mathbb{E}\left(w_{N,\alpha}(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R)\right)\, dR - w_{N,\alpha}(0).
$$

Die rechte Seite erfüllt die gleiche schwache Fortsetzungseigenschaft wie die Funktion $Z_{N,v,\alpha}(s+\gamma(\alpha) - 1)$, so daß man auf die linke Seite der Gleichung den Teil (ii) des Lemmas 6.16 anwenden kann. Aus dieser Anwendung folgt dann, daß die Bedingung (6.6.20) erfüllt ist für $F_\alpha(R) := \int_0^R \sqrt{\tilde{R}} e^{(-\gamma(\alpha)+1)\tilde{R}}\mathbb{E}\left(w_{N,\alpha}(S_{m_{\tilde{R}}(x)}\varphi(x) + \alpha\tilde{R})\right)$. Somit gilt gleichmäßig für $\alpha \in J$

$$
\mathbb{E}\left(v_{N,\alpha}(S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R)\right) \;{}_R\!\sim_\infty\; \frac{\hat{v}(0)C(\alpha)}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}} \frac{e^{R\gamma(\alpha)}}{\sqrt{R}}.
$$

Damit ist die Bedingung (ii) des Lemmas 6.10 bewiesen.

Mit ähnlicher Methodik läßt sich die Bedingung (i) des Lemmas 6.10 wie folgt nachweisen:

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $J \subset \Gamma$ kompakt und nicht leer. Man wählt eine nicht–negative Funktion $v \in \Delta$, so daß $v > 1$ auf I, $\hat{v}(ix) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{supp}(x \mapsto \hat{v}(ix)) = [-N, N]$, für ein hinreichend großes N. Dann wird die Bedingung (i) durch die folgende Tatsache bewiesen , die wir anschließend zeigen wollen:

$$\sup_{R \geq 1} \sup_{\alpha \in J} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} v(s+t)\, dq_\alpha^R(s) < \infty.$$

Unter Verwendung des Lemma 6.11 ergibt sich, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(s+t)\, dq_\alpha^R(s) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}}{2\pi C(\alpha)} \frac{\sqrt{R}}{e^{\gamma(\alpha)R}} \int_{-N}^{N} \hat{v}(iw) e^{itw} \mathbb{E}\left(e^{(iw+t(\alpha))(S_{m_{R(x)}}\varphi(x)+\alpha R)}\right) dw.$$

Nun hat die Funktion $\bar{Z}_\alpha$, definiert durch

$$\bar{Z}_\alpha(s) := \int_0^\infty e^{-sR} \left(\int_{-N}^{N} \hat{v}(iw) e^{itw} \mathbb{E}\left(e^{(iw+t(\alpha))(S_{m_{R(x)}}\varphi(x)+\alpha R)}\right) dw \right) dR,$$

dieselben schwachen Fortsetzungseigenschaften 6.14 wie $Z_{N,v,\alpha}(s)$. Wie beim Beweis der Bedingung (ii) des Lemmas 6.10 folgert man unter Verwendung des Lemmas 6.16 (ii), daß gleichmäßig für $\alpha \in J$gilt:

$$\int_{-N}^{N} \hat{v}(iw) e^{itw} \mathbb{E}\left(e^{(iw+t(\alpha))(S_{m_{R(x)}}\varphi(x)+\alpha R)}\right) dw = \mathcal{O}_R^\infty \left(\frac{e^{\gamma(\alpha)R}}{\sqrt{R}} \right);$$

dabei hängen die Konstanten nur von v und somit von I ab.

6.3 Der Beweis des Korollars 5.3

Wir untersuchen hier exemplarisch den Fall $t > 0$. Der Fall $t < 0$ läßt sich analog abhandeln. Da $\gamma(\alpha)$ reell analytisch ist und Γ offen, gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß für $\alpha := \alpha(t)$ die Reihenentwicklung von γ auf $[\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ konvergiert, und dieses Intervall ganz in Γ liegt. Sodann betrachten wir die Gleichung

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) \geq -\alpha R\}\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{[R\epsilon]} \mu_{\beta(0)\psi}\left(\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R \in [j, j+1)\}\right) \\ &\quad + \mu_{\beta(0)\psi}\left(\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R \geq [R\epsilon] + 1\}\right). \end{aligned} \tag{6.6.21}$$

Für jedes $0 \leq j \leq [R\epsilon]$ haben wir einerseits, daß

$$\begin{aligned} &\mu_{\beta(0)\psi}\left(\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R \in [j, j+1)\}\right) \\ &\qquad = \mu_{\beta(0)\psi}\left(\left\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \left(\alpha - \frac{j}{R}\right) R \in [0, 1)\right\}\right), \end{aligned}$$

und durch die Wahl von ϵ, andererseits

$$\begin{aligned} \gamma\left(\alpha - \frac{j}{R}\right) &= \gamma(\alpha) - \gamma'(\alpha)\frac{j}{R} + \mathcal{O}_R^{\infty}(R^{-2}) \\ &= \gamma(\alpha) - t(\alpha)\frac{j}{R} + \mathcal{O}_R^{\infty}(R^{-2}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Geichmäßigkeit in α im Theorem 5.2 gilt also für den ersten Summanden in (6.6.21), daß

$$\sum_{j=0}^{[R\epsilon]} \mu_{\beta(0)\psi}\left(\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R \in [j, j+1)\}\right) \;{}_{R}\!\sim_{\infty}$$

$$\begin{aligned} {}_{R}\!\sim_{\infty} &\quad \frac{C(\alpha)}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}} \frac{e^{R\gamma(\alpha)}}{\sqrt{R}} \left(\sum_{j=0}^{[R\epsilon]} e^{-t(\alpha)j}\right) \int_0^1 e^{-t(\alpha)s}\, ds \\ {}_{R}\!\sim_{\infty} &\quad \frac{C(\alpha)}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}} \frac{e^{R\gamma(\alpha)}}{\sqrt{R}} \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha)s}\, ds \\ {}_{R}\!\sim_{\infty} &\quad \frac{C(\alpha)}{\sqrt{2\pi\beta''(t(\alpha))}} \frac{e^{R\gamma(\alpha)}}{t(\alpha)\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Den zweiten Summanden in (6.6.21) schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \mu_{\beta(0)\psi}\left(\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + \alpha R \geq [R\epsilon] + 1\}\right) &\leq \mu_{\beta(0)\psi}\left(\{x : S_{m_R(x)}\varphi(x) + (\alpha - \epsilon)R \geq 0\}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(e^{t(\alpha-\epsilon)\left(S_{m_R(x)}\varphi(x) + (\alpha-\epsilon)R\right)}\right), \end{aligned}$$

wobei die zweite Ungleichung folgt, weil $t(\alpha - \epsilon) > t(\alpha) > 0$. Analog zum Beweis des lokalen Gesetzes große Deviationen betrachten wir wieder die Laplace–Transformierte der momentenerzeugenden Funktion $Z_{\alpha-\epsilon}$, definierrt durch

$$Z_{\alpha-\epsilon}(s+\gamma(\alpha)-1,0)=\int_0^\infty e^{-sR}e^{(-\gamma(\alpha)+1)R}\left(\int_X e^{t(\alpha-\epsilon)(S_{m_{R(x)}}(\varphi(x)+(\alpha-\epsilon)R)}\,d\mu_{\beta(0)\psi}\right)\,dR.$$

Diese Funktion ist gemäß Proposition 6.1 (i) auf $\{s : \mathfrak{Re}(s) > 1\}$ analytisch. Durch partielle Integration erhalten wir dann für $\mathfrak{Re}(s) > 1$, daß

$$\int_0^\infty e^{-sR}\,de^{(-\gamma(\alpha)+1)R}\mathbb{E}\left(e^{t(\alpha-\epsilon)(S_{m_{R(x)}}(\varphi(x)+(\alpha-\epsilon)R)}\right)=$$

$$=s\int_0^\infty e^{-sR}e^{(-\gamma(\alpha)+1)R}\mathbb{E}\left(e^{t(\alpha-\epsilon)(S_{m_{R(x)}}(\varphi(x)+(\alpha-\epsilon)R)}\right)\,dR-1.$$

Es ist wohl bekannt (siehe z. B. [Wid46, Theorem 2.2.1, Seite 39]), daß dann für alle $\delta > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(e^{t(\alpha-\epsilon)(S_{m_{R(x)}}(\varphi(x)+(\alpha-\epsilon)R)}\right)=\mathcal{O}_R^\infty(e^{\gamma(\alpha-\epsilon)+\delta)R}).$$

Da $\gamma(\alpha-\epsilon) < \gamma(\alpha)$ ist, folgt, daß

$$\mu_{\beta(0)\psi}\left(\{x : S_{m_{R(x)}}\varphi(x)+\alpha R \geq [R\epsilon]+1\}\right)=o_R^\infty(e^{\gamma(\alpha)R}),$$

womit der Beweis von 5.3 vollständig ist.

Literaturverzeichnis

[Bow75] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphism*, volume 470 of *LNM*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[BPPV84] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi, und A. Vulpiani. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. *J. Phys. A*, 17:3521–3531, 1984.

[BR87] T. Bohr und D. Rand. The entropy function for characteristic exponents. *Physica D*, 25:387–393, 1987.

[CM92] R. Cawely und R. D. Mauldin. Multifractal decomposition of Moran fractals. *Adv. Math.*, 92:196–236, 1992.

[Col88] P. Collet. Hausdorff dimension of the singularities for invariant measures of expanding dynamical systems. In *Proceedings, Dynamical Systems. Valparaiso*, pages 47–58, New–York, 1988. Lecture Notes in Mathematics, Springer–Verlag.

[DGS76] M. Denker, C. Grillenberger und K. Sigmund. *Ergodic Theory on Compact Spaces*, volume 527. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, LNM edition, 1976.

[Ell85] R. S. Ellis. *Entropy, Large Deviation, and Statistical Mechanics*, volume 271 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Tokyo, 1985.

[EM92] G. A. Edgar und R. D. Mauldin. Multifractal decompositions of digraph recursive fractals. *Proc. London Math. Soc.*, 65:604–628, 1992.

[Fal90] K. Falconer. *Fractal Geometry*. J. Wiley, 1990.

[FP85] U. Frisch und G. Parisi. On the singularity structure of fully developed turbulence, appendix to U. Frisch, fully developed turbulence and intermittency. In *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, pages 84–88, North Holland, Amsterdam, 1985. Intermat. School of Physics „Enrico Fermi“.

[Fuj87] H. Fujisaka. Statistical–thermodynamic formalism of self–similarity. *Prog. Theo. Phys.*, 6:1334–1343, 1987.

[GH88] Y. Guivarc'h und J. Hardy. Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 24:73–98, 1988.

[HJK+86] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia und B. J. Shraiman. Fractal measures and their singularities: The charactarization of strange sets. *Phys. Rev. A*, 33:1141–1151, 1986.

[HP83] H. Hentschel und I. Proccacia. The infinite number of generalizied dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D*, pages 435–444, 1983.

[Kat80] T. Kato. *Pertubation Theory for Linear Operators*. Springer–Verlag, New York, 1980.

[KG92] J. F. King und J. S. Geronimo. Singularity spectrum for recurrent IFS attractors. *Nonlinearity*, 6:337–348, January 1992.

[Kol41] A. N. Kolmogoroff. . *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR*, 30:301, 1941.

[KS90] A. Katsuda und T. Sunada. Closed orbits in homology classes. *Publ. Math. IHES*, 71:5–32, 1990.

[Lal85] S. Lalley. Ruelle's Perron-Frobenius theorem and a central limit theorem for additive functionals of one-dimensional Gibbs states. *Proc. Conf. in honour of H. Robbins*, 1985.

[Lal87] S. Lalley. Distribution of periodic orbits of symbolic and Axiom A flows. *Adv. Appl. Math.*, 8:154–193, 1987.

[Lop89] A. O. Lopes. The dimension spectrum of the maximal measure. *SIAM J. Math. Anal.*, 20:1243–1254, 1989.

[Man72] B. B. Mandelbrot. *Possible refinement of the lognormal hypothesis concernig the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence*, volume 12, pages 333–351. Springer–Verlag, New–York, lecture notes in physics edition, 1972.

[Man74] B. B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self–similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62:331–358, 1974.

[Man88] B. B. Mandelbrot. An introduction to multifractal distribution functions. In *Fluctuation and Pattern Formation*. K. Academic, 1988.

[Ols95] L. Olsen. A multifractal formalism. *Advances in Mathematics*, 116(1):82–196, November 1995.

[Pes88] Ya Pesin. Dimension type characteristic for invariant sets of dynamical systems. *Russian Math. Surveys*, 43:111–151, 1988.

[Pes97] Ya. Pesin. *Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications*. Chicago lectures in mathematics. The University of Chicago Press, 1997.

[Pol84] M. Pollicott. A complex Ruelle-Perron-Frobenius theorem and two counterexamples. *Ergod. Th. and Dyn. Syst.*, 4:135–146, 1984.

[PP90] W. Parry und M. Pollicott. *Zeta-Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics*, volume 187-188 of *Astérique*. Sociétée Mathématique de France, Paris, 1990.

[PW96] Ya. Pesin und H. Weiss. The multifractal analysis of Gibbs measures: motivation, mathematical foundation, and examples. *Chaos*, October 1996.

[PW97] Ya. Pesin und H. Weiss. A multifractal analysis of equilibrium measures for conformal expanding maps and Markov Moran geometric constructions. *J. Stat. Phys.*, 86(1–2):233–275, 1997.

[Ran89] D. Rand. The singularity spectrum f(α) for cookie–cutters. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 9:527–541, 1989.

[Rie95] R. Riedi. An improved multifractal formalism and self-similar measures. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 189:462–490, March 1995.

[Roc70] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[Rue78] D. Ruelle. *Thermodynamic Formalism*, volume 5 of *Encyclopedia of Mathematics and its Application*. Addison-Wesley, 1978.

[Tél88] T. Tél. Fractals, multifractals and thermodynamics. *Z. Naturforschung A*, 43:1154–1174, 1988.

[Wad96] S. Waddington. Large deviation asymptotics for Anosov flows. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Analyse non linéaire*, 13(4):445–484, 1996.

[Wid46] D. V. Widder. *The Laplace Transform*. Princton Uni. Press, 1946.

[Yag66] A. N. Yaglom. The influence of the fluctuation of the energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 166:49–52, 1966.

[You82] L. S. Young. Dimension, entropy, and Lyaponov exponents. *Ergod. Theory and Dynam. Syst.*, 2:109–124, 1982.

Index

Lebenslauf

Ich wurde am 8. Mai 1969 als Sohn des Ministerialrats Heinrich Keßeböhmer und Ehefrau Ingrid, geb. Brühling, in Springe/Deister geboren. Von August 1975 bis Juni 1981 besuchte ich erst die Grundschule und dann die Orientierungsstufe in Wennigsen. Anschließend wurde ich auf das Gymnasium in Gehrden umgeschult. Das Schuljahr 1985/86 verbrachte ich als Austauschschüler in den USA und besuchte dort die High School. Im Mai 1989 bestand ich mit den Prüfungsfächern Mathematik, Physik, Englisch und Erdkunde das Abitur. In der Zeit von Juni 1989 bis Juli 1990 leistete ich den gesetzlichen Wehrdienst als Sanitäter ab. Am 01.10.1990 nahm ich das Physik- und Philosophiestudium und am 01.10.1992 auch das Mathematikstudium an der Georg–August–Universität in Göttingen auf. Ich legte am 22.10.1992 die Diplomvorprüfung im Studiengang Physik und am 07.05.1993 im Studiengang Mathematik ab. Von Oktober 1993 bis April 1996 war ich am Mathematischen Institut der Georg-August-Universität Göttingen als wissenschaftliche Hilfskraft angestellt, um Übungsgruppen zu Vorlesungen des Grund- und Hauptstudiums zu betreuen. Am 01.10.1996 bestand ich die Diplomprüfung im Studiengang Mathematik. Meine Diplomarbeit trägt den Titel „Poissonsche Gesetze im thermodynamischen Formalismus”. Seit dem 01.12.1996 erhalte ich ein Doktorandenstipendium im Rahmen des Graduiertenkollegs „Strömungsinstabilitäten und Turbulenz” an der Georg–August–Universität Göttingen. Durch ein Kurzzeitstipendium des DAAD gefördert habe ich vom 01.10.1998 bis zum 15.01.1999 die Arbeitsgruppe von Prof. K. Falconer, Dr. L. Olsen und Dr. B. O. Stratmann an der University of St. Andrews in Schottland besucht.