Konstruktion eines Poissonrandes für Halbgruppen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Susanne Koch
aus
Gießen

Göttingen 2000

D7

Referent: Prof. Dr. Manfred Denker

Korreferent: Prof. Dr. Heinrich Hering

Tag der mündlichen Prüfung: 02.11.2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seit Beginn des 20. Jahrhunderts haben sich Mathematiker, anfangs insbesondere Vertreter der geometrischen Maßtheorie, mit Mengen fraktionaler Dimension beschäftigt (z.B. Jarnik[28], Besicovitch[4]).
Ausschlaggebend für das Interesse an Anwendungen dieses Teilgebietes der Mathematik war u.a. die Arbeit von Mandelbrot[33], in welcher er fraktale Mengen als Modelle verschiedener physikalischer Phänomene (z.B. Turbulenz in Flüssigkeiten) betrachtete und den Begriff des Fraktals prägte. Bis zu den 80er Jahren lag das Hauptaugenmerk beim Studium von Fraktalen auf der Entwicklung einer Theorie der fraktalen Mengen selbst. Beispielhaft seien in diesem Zusammenhang nur die Begriffe der Selbstähnlichkeit und der Dimension einer Menge genannt. Wichtige Beiträge hierzu leisteten Hata[23], Hutchinson[25], Falconer[15], Dekking[6] u.a. Gegen Ende der 80er Jahre wurde mit der Entwicklung einer Analysis auf fraktalen Mengen begonnen. Denn die ursprünglich von Leibniz und Newton entwickelten Methoden der klassischen Analysis erwiesen sich für das Studium derartig feinstrukturierter Mengen als ungeeignet. Das Fehlen einer differenzierbaren Struktur im herkömmlichen Sinne hat zu verschiedenen Ansätzen geführt, (harmonische) Analysis auf Fraktalen zu betreiben:
Die ersten Arbeiten mit dieser Zielsetzung wurden von Kusuoka[32], Goldstein[20] und Barlow & Perkins[1] ausgeführt. Sie verfolgten einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz, indem sie auf dem Sierpiński-Raum, dem Prototypen eines selbstähnlichen p.c.f. Fraktals (vgl. Abschnitt 3.3), als Limes einer renormierten Irrfahrt eine Brownsche Bewegung konstruierten und den Laplaceoperator als den infinitesimalen Generator des Diffusionsprozesses

formulierten.
Kigami etablierte in den Arbeiten [30, 31] eine Analysis auf p.c.f. selbstähnlichen Mengen auf andere Art und Weise: Seine Definition der harmonischen Funktionen auf einer fraktalen Menge ist rein geometrischer Natur, und damit besitzt auch der Laplaceoperator, welcher als Limes von Differenzenoperatoren für Funktionen auf den Präfraktalen erhalten wurde, eine geometrische Struktur.
Einen potentialtheoretischen Zugang zu der Problemstellung wählte Metz[35]. Er konstruierte eine Klasse von harmonischen Funktionen auf einem Sierpiński-Raum derart, daß diese Funktionen u.a. ein Minimalprinzip und Harnacks Ungleichung erfüllen. Über eine Konstruktion der Brownschen Bewegung führte auch dieser Ansatz schließlich zu einer Analysis auf Fraktalen.
Die Herangehensweise Waddingtons[38] hatte dynamischen Charakter. Hier wurden modifizierte Cayleygraphen und dynamische Zetafunktionen verwendet, um einen Laplaceoperator zu definieren.

Allen bislang genannten Ansätzen ist gemein, daß die harmonischen Funktionen auf den Sierpiński-Räumen selbst oder auf den bei der Konstruktion der Räume auftretenden Präfraktalen definiert wurden.

Kürzlich haben Freiberg & Zähle[17] einen maßgeometrischen Ansatz zur Entwicklung harmonischer Analysis auf Fraktalen entwickelt. Ausgehend von einem endlichen Maß μ auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger K wurden mittels einer Differentiation bezüglich des Maßes μ die Dirichletform und ein Laplaceoperator definiert. Im Anschluß daran konnten die Gauß-Green-Formel bewiesen und spektrale Eigenschaften des Laplaceoperators untersucht werden.

In [9] haben Denker & Sato eine weitere Möglichkeit, harmonische Analysis auf p.c.f. selbstähnlichen Mengen zu betreiben, ausgearbeitet.
Im Gegensatz zu den oben beschriebenen Arbeiten wurden die harmonischen Funktionen auf einem Sierpiński-Raum hier nicht direkt auf dem Fraktal konstruiert, sondern durch die Fortsetzung der harmonischen Struktur einer

Markoffkette[1] auf ihren Martinrand, welcher im vorhinein mit dem Sierpiński-Raum identifiziert werden konnte, erhalten. (Auf diese Möglichkeit wird auch in Abschnitt 3.5 dieser Arbeit zurückgegriffen, um die Poissondarstellung harmonischer Funktionen auf einem Sierpiński-Raum zu erhalten.)

Ist eine Markoffkette mit diskretem Zustandsraum E und Übergangswahrscheinlichkeiten $p(e_1, e_2)$, wobei $e_1, e_2 \in E$ seien, gegeben, so ist der Markoffoperator P auf der Menge aller reellwertigen Funktionen f auf E definiert als $Pf(e_1) := \sum_{e_2 \in E} p(e_1, e_2) f(e_2)$. Eine beschränkte Funktion f auf E heißt *P-harmonisch*, falls die Gleichung $(P - \mathbf{I})f = 0$ erfüllt ist; hierbei bezeichnet $\mathbf{I}$ die Identität. Von daher kann die Theorie harmonischer Funktionen für Markoffoperatoren als ein generelles Konzept für die Theorie von verallgemeinerten Laplaceoperatoren betrachtet werden. Ursprünglich geht diese Idee auf Doob[12] zurück. Von Dynkin[13] wurde sie 1969 unter Verwendung des Martinrandbegriffes rigoros formuliert.
Sei $\mathfrak{A} := \{1, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, ein endliches Alphabet und $\mathcal{W} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}^n$ der Raum aller endlichen Wörter über $\mathfrak{A}$ (für alle $a \in \mathfrak{A}$ werde $\emptyset := a^0$ als das *leere Wort* bezeichnet). Es sei $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markoffkette mit Zustandsraum $\mathcal{W}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten seien gegeben durch $p(a^k, a^k c) = N^{-1}$ und $p(\mathbf{w}ab^k, \mathbf{w}ab^k c) = p(\mathbf{w}ab^k, \mathbf{w}ba^k c) = (2N)^{-1}$, wobei $a, b, c \in \mathfrak{A}$, $a \neq b$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sei. Definiert man das Produkt zweier Wörter in $\mathcal{W}$ als deren Hintereinanderschaltung, so ist $\mathcal{W}$ eine diskrete Halbgruppe. Fortan bezeichne $\mathcal{H}(P)$ die Menge aller beschränkten, P-harmonischen Funktionen auf $\mathcal{W}$. In Denker & Sato[9] wurde gezeigt, daß der Martinrand der Markoffkette $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ homöomorph zu dem $(N-1)$-dimensionalen Sierpiński-Raum $\mathcal{S}^{N-1}$ ist. Mit Dynkins Resultaten (vgl. Theorem 9 und 10 in [13]) erhält man hiermit über die Integraldarstellung[2]

$$h(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{S}^{N-1}} k(\mathbf{w}, \xi)\, \phi_h(\xi)\, d\mu_1(\xi), \ \ \mathbf{w} \in \mathcal{W}, \tag{1}$$

[1] Diese Markoffkette ist weder irreduzibel noch hat sie die *bounded-range*-Struktur, d.h. die Übergangswahrscheinlichkeiten für bestimmte Paare von Wörtern, die bezüglich der Pfadmetrik weit auseinanderliegen, sind positiv.

[2] Siehe Theorem 5.6 in Denker & Sato[9].

einen Isomorphismus $I : L^\infty(\mathcal{S}^{N-1}, \mu_1) \longrightarrow \mathcal{H}(P)$. Hierbei bezeichnet μ_1 das zu der konstanten harmonischen Funktion 1 gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß und $k : \mathcal{W} \times \mathcal{S}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ den Martinkern der Markoffkette $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Wie in DENKER & SATO[11] gezeigt wurde, ist jede harmonische Funktion ϕ auf $\mathcal{S}^{N-1}$ eindeutig durch die Funktionswerte $I(\phi)(\mathbf{w}) =: h_\phi(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, bestimmt. Damit liefert (1) eine Darstellung harmonischer Funktionen auf dem $(N-1)$-dimensionalen Sierpiński-Raum. In [11] wurde ein entsprechender Laplaceoperator definiert und eine Lösung des Dirichlet- und Neumannproblems angegeben.

Um die in dieser Arbeit durchgeführten Überlegungen zu motivieren, sei ein kurzer Überblick über eine Arbeit FURSTENBERGs gegeben: In [18] beschäftigte er sich mit der Frage, in welchem Sinne die Überlagerung einer diskreten Gruppe, sofern eine solche existiert, eindeutig ist. Zu diesem Zweck betrachtete er eine Gruppe G, ausgestattet mit einem Maß μ und einer gruppeninvarianten Irrfahrt $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$[3]. Die Übergangswahrscheinlichkeiten wurden für alle $g, g' \in G$ definiert als $p(g, g') := \mu\big(\{g^{-1}g'\}\big)$. Damit kann die Position der Irrfahrt zu einem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ durch Rechtsmultiplikation eines Gruppenelementes mit dem Inversen der Position zum Zeitpunkt $n-1$ erhalten werden. Diese Zuwächse sind μ-verteilt. Zwei zeitlich aufeinanderfolgende Positionen der Irrfahrt sind demnach dadurch charakterisiert, daß die zweite aus Multiplikation der ersten mit einem Gruppenelement hervorgeht. Betrachtet man die Multiplikation mit einem Gruppenelement g als Abbildung $\eta_g : G \longrightarrow G$, $g' \longmapsto g'g$, so gilt insbesondere $\eta_g(g'g'') = g'g''g = g'\eta_g(g'')$ für alle $g \in G$. Die Definition des Maßes μ auf G kann also durch die Definition des Maßes μ auf $\mathcal{E}(G) := \{\eta : G \longrightarrow G \,|\, \eta(g'g'') = g'\eta(g'') \text{ für alle } g', g'' \in G\}$ ersetzt werden. Im weiteren Verlauf dieser Einleitung wird auf diese Möglichkeit noch einmal Bezug genommen werden.

Eine beschränkte und meßbare Funktion h auf G heißt μ-harmonisch, falls für alle $g \in G$ die Gleichung $h(g) = \int_G h(gg')\, d\mu(g')$ erfüllt ist. Fortan bezeichne $\mathbf{H}$ die Menge der μ-harmonischen Funktionen auf G. FURSTENBERG bezeichnete einen topologischen Raum B, welcher an G so „anzuheften" ist, daß auch $G \cup B$

[3]Die Gruppeninvarianz bringt es mit sich, daß man nur Prozesse $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ betrachten muß, deren Startpunkt im neutralen Element der Gruppe liegt.

einen topologischen Raum bildet, als *Rand* von $(G, \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, falls die Folge $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen ein Element in B konvergiert. Die Verteilung von $\lim_{n\to\infty} U_n$ in B bestimmt ein Wahrscheinlichkeitsmaß m auf B. Sofern das Tupel (B, m) eine Maximalitätsbedingung[4] erfüllte, wurde es aufgrund seiner Rolle in der Poissondarstellung μ-harmonischer Funktionen (siehe (2)) als der *Poissonrand von G* bezeichnet. Doch nicht jede Gruppe besitzt einen derartigen Rand. FURSTENBERG konnte zeigen, daß es für eine lokal-kompakte Gruppe G mit abzählbarer Basis und Wahrscheinlichkeitsmaß μ einen Rand (B, m) gibt, so daß jede μ-harmonische Funktion h auf G eine *Poissondarstellung* besitzt, d.h. daß eine beschränkte, meßbare Funktion ϕ_h auf B existiert mit der Eigenschaft, daß für alle $g \in G$

$$h(g) = \int_B \phi_h(g\xi)\, dm(\xi) \tag{2}$$

gilt (vgl. Theorem 3.1 in [18]). Darüber hinaus wurde nachgewiesen, daß jeder Rand von G ein äquivariantes Bild[5] von (B, m) ist und die Funktion ϕ_h modulo Nullfunktionen eindeutig ist. Um seine Behauptung zu beweisen, definierte FURSTENBERG die Menge $\mathbf{A}$ aller reellwertigen Funktionen auf G, für die der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f\big(U_n(g)\big)$ für alle $g \in G$ fast sicher existiert. Die Menge $\mathbf{A}$ ist eine Banach-Algebra. Es bezeichne $\mathbf{J}$ das abgeschlossene Ideal aller Funktionen in $\mathbf{A}$, für welche der Grenzwert für alle $g \in G$ fast sicher verschwindet. Die Menge $\mathbf{H}$ ist isomorph zu $\mathbf{A}/\mathbf{J}$. Als kommutative C^*-Algebra besitzt $\mathbf{A}/\mathbf{J}$ eine Darstellung als ein Raum stetiger Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum B'. Folglich existiert eine bijektive Abbildung von $\mathbf{H}$ nach $\mathcal{C}(B')$. Nach

[4] FURSTENBERG ging es insbesondere darum, zu einer gegebenen Gruppe G einen Rand zu konstruieren, der die größtmögliche Information über das Verhalten einer gruppeninvarianten Irrfahrt im Unendlichen liefert. Bei der Suche nach diesem „maximalen“ Rand stellten sich die harmonischen Funktionen auf G als ein geeignetes Hilfsmittel heraus. Da jeder Rand von G zu einer Unteralgebra von $\mathbf{H}$ korrespondiert, wurde derjenige Rand gesucht, der isomorph zu ganz $\mathbf{H}$ korrespondiert. Dieser Rand sollte als der *Poissonrand* der Gruppe bezeichnet werden. FURSTENBERG wies nach, daß jeder andere Rand ein äquivariantes Bild des Poissonrandes (vgl. Fußnote 5) ist. In diesem Sinne ist die Maximalitätsbedingung zu verstehen.

[5] Ist (C, n) ein beliebiger Rand von G, so heißt (C, n) ein äquivariantes Bild von (B, m), falls eine Abbildung $f : B \longrightarrow C$ existiert, so daß $f(gt) = gf(t)$ ist für alle $g \in G$ und alle $t \in B$ und $m_f = n$ gilt.

dem Darstellungssatz von RIESZ existiert somit eine Darstellung

$$h(e) = \int_{B'} \phi_h(\eta)\, dm'(\eta),$$

wobei m' ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß auf B' und ϕ_h eine auf B' stetige, reellwertige Funktion sei. Die Gruppe G operiert auf B' kanonisch. Daraus folgt für alle $g \in G$

$$h(g) = \int_{B'} \phi_h(g\eta)\, dm'(\eta). \tag{3}$$

Der eindeutig bestimmte Raum B' besitzt im allgemeinen keine abzählbare Basis. Man kann jedoch einen separablen Raum $B \subset B'$ erhalten mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{C}(B')$ isomorph ist zu $L^\infty(B, m)$. Hierbei bezeichnet m ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf B. Damit geht (3) über in

$$h(g) = \int_{B} \phi_h(g\xi)\, dm(\xi),\ \ g \in G,$$

wobei ϕ_h beschränkt und meßbar, aber nicht länger notwendig stetig ist.

Da invariante Irrfahrten auf Halbgruppen als homogene Markoffprozesse in Raum und Zeit verstanden werden können, drängte sich die Frage auf, ob die Poissondarstellung μ-harmonischer Funktionen (2) im Falle einer Verallgemeinerung von FURSTENBERGs Theorie auf die Halbgruppe $\mathcal{W}$ mit der Martinranddarstellung P-harmonischer Funktionen (1) in Einklang zu bringen sei.

Dieses Problem war Motivation für die vorliegende Arbeit: Es stellte sich heraus, daß eine Poissondarstellung P-harmonischer Funktionen über $\mathcal{S}^{N-1}$ durch eine Erweiterung der Theorie auf den Spezialfall der Halbgruppe $\mathcal{W}$ zusammen mit einer *nearest-neihgbour*-Irrfahrt nicht möglich ist. Ein wesentliches Problem besteht darin, daß die Irrfahrt der Tatsache nicht gerecht wird, daß abzählbar viele Punkte im Sierpiński-Raum keine eindeutige Darstellung durch Elemente in $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ haben. Durch Wahl eines geeigneten größeren Wortraumes $\mathcal{W}^\star \supsetneqq \mathcal{W}$ wurde dieser Schwierigkeit begegnet. Die Ergebnisse dieser Überlegungen finden sich in Kapitel 3 wieder. Anschließend wurde ein Ansatz zur Verallgemeinerung der Theorie auf beliebige Halbgruppen durchgeführt. Hierbei sollten insbesondere

auch diejenigen Fälle Berücksichtigung finden, in denen die Pfade des Prozesses nicht ausschließlich durch Multiplikation von Halbgruppenelementen entstünden. Zu diesem Zweck wurde das Maß μ nicht auf der Halbgruppe, sondern auf der Menge aller Selbstabbildungen der Halbgruppe definiert. An dieser Stelle sei angemerkt, daß - um befriedigende Resultate zu erzielen - gewisse Einschränkungen an die Elemente des Trägers von μ gemacht werden müssen (siehe Kapitel 2).
Ein weiterer Unterschied zu FURSTENBERGS Arbeit besteht in der Definition des Randes der Halbgruppe. In Anlehnung an KAIMANOVICH[29][6] wird ein Rand in der vorliegenden Arbeit als ein meßbarer Halbgruppenraum mit μ-stationärem Maß und der Eigenschaft, daß die L^∞-Funktionen dieses Raumes zu einer Unteralgebra der harmonischen Funktionen auf der Halbgruppe isomorph sind, rein maßtheoretisch definiert.
Auch die Beweisidee der hier gelieferten Darstellung unterscheidet sich von der FURSTENBERGS: Der Nachweis der Existenz einer Poissondarstellung μ-harmonischer Funktionen auf der Halbgruppe ist maßtheoretisch elementar und konstruktiv. Der Poissonrand wird durch eine Menge von Ultrafiltern auf einer Teilmenge der μ-harmonischen Funktionen gebildet. Ein Maß auf dieser Menge wird kanonisch definiert. Auf die Definition eines μ-Prozesses kann bei dieser Vorgehensweise verzichtet werden.

Was den Vergleich der Martinranddarstellung P-harmonischer Funktionen (1) mit der in dieser Arbeit hergeleiteten Poissondarstellung μ-harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}$ $\big($siehe (2)$\big)$ betrifft, so konnte gezeigt werden, daß der Sierpiński-Raum kein geeigneter Kandidat für den Poissonrand ist. Dies liegt daran, daß - wie bereits angedeutet - die μ-harmonischen Funktionen auf $\mathcal{W}$ lediglich als Einschränkung μ-harmonischer Funktionen auf dem Wortraum $\mathcal{W}^\star \supset \mathcal{W}$ erhalten werden, und der Poissonrand von $\mathcal{W}^\star$, im folgenden mit $(\Sigma^\star, \nu^\star)$ bezeichnet, maßtheoretisch eine echte Obermenge von $\mathcal{S}^{N-1}$ ist. Hierin

[6] Hier wird der Rand $\Gamma(G,\mu)$ einer Irrfahrt auf einer Gruppe G mit einem Maß μ als ein meßbarer G-Raum mit μ-stationärem Wahrscheinlichkeitsmaß ν angegeben (dabei heißt ν *μ-stationär*, falls $\nu = \mu \star \nu$ ist). Es wird nachgewiesen, daß verschiedene andere Ränder, z.B. der Martinrand, der Poissonrand und der *exit boundary*, als meßbare G-Räume isomorph sind zu $\Gamma(G,\mu)$.

liegt ein Vorteil der Martinranddarstellung: Die Fortsetzung der harmonischen Struktur der Markoffkette $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf ihren Martinrand erlaubt es, der geometrischen Identifikation bestimmter Punkte von $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ durch geeignet definierte Übergangswahrscheinlichkeiten zu entsprechen.
Doch auch die neue Darstellung ist von gewissem Wert: Zum einen birgt sie den Vorteil, daß der im allgemeinen nicht oder nur durch hohen Rechenaufwand explizit anzugebende Martinkern nicht berechnet werden muß (noch ist nicht endgültig geklärt, für welche Klasse von Markoffketten sich der Kern überhaupt explitzit angeben läßt). Zum anderen konnte gezeigt werden, daß eine Abbildung $\Lambda : \Sigma^\star \longrightarrow \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ existiert, so daß jede beschränkte, meßbare Funktion $\psi : \Sigma^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, welche auf den Fasern $\Lambda^{-1}(s)$, $s \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$, konstant ist, über $h_\psi(\mathbf{w}) = \int_{\Sigma^\star} \psi(\mathbf{w}\xi)\, d\nu^\star(\xi)$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, eine beschränkte, P-harmonische Funktion definiert (vgl. Abschnitt 3.5). Demnach ist ψ zwar auf $\Sigma^\star$ definiert, durch die Werte auf $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ - und dieser Raum ist maßtheoretisch isomorph zu dem Sierpiński-Raum - jedoch schon eindeutig bestimmt.

Die vorliegende Arbeit ist aufgebaut wie folgt: Im ersten Kapitel geht es im wesentlichen um die Festsetzung der in der Arbeit verwendeten Notationen und Konventionen sowie um die Bereitstellung der in den beiden nachfolgenden Kapiteln benötigten Grundbegriffe.
In Kapitel 2 wird der Poissonrand für eine Halbgruppe G schrittweise konstruiert. Dazu wird zunächst bewiesen, daß der Grenzwert harmonischer Funktionen bei Anwendung auf einen in Kapitel 1 definierten stochastischen Prozeß mit Werten in der Halbgruppe existiert. Im Anschluß daran wird erörtert, auf welche Art und Weise man aus beliebigen Funktionen auf der Halbgruppe harmonische Funktionen gewinnen kann. Vor diesem Hintergrund wird im nächsten Abschnitt eine σ-Algebra in der Halbgruppe definiert, welche zu einer Teilmenge der harmonischen Funktionen auf der Halbgruppe korrespondiert. In Abschnitt 2.4 wird nachgewiesen, daß diese Teilmenge, ausgestattet mit geeignet definierter Addition und Multiplikation, eine Maßalgebra ist. Weiterhin von großer Bedeutung ist diese Teilmenge dann in den Abschnitten 2.5 und 2.6. Hier wird mit Hilfe des Begriffes des Ultrafilters der Rand der Halbgruppe konstruiert. Anschließend wird eine ausführliche Herleitung der Integraldarstellung

harmonischer Funktionen über den vorab konstruierten Rand durchgeführt, um schließlich in Abschnitt 2.8 das Hauptresultat des ersten Teils der Arbeit formulieren zu können.

In Kapitel 3 geht es vorrangig um eine Anwendung des in Kapitel 2 zur Verfügung gestellten Formalismus auf den Wortraum $\mathcal{W}^\star$ und den Vergleich der Martinranddarstellung P-harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}$ mit der Poissondarstellung μ-harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}^\star$. Zunächst werden die Resultate aus den Kapiteln 1 und 2 auf $\mathcal{W}^\star$ angewendet, um eine Poissondarstellung μ-harmonischer Funktionen über den Poissonrand $(\Sigma^\star, \nu^\star)$ von $\mathcal{W}^\star$ zu erhalten. Im Anschluß daran werden Sierpiński-Räume definiert und die Martinranddarstellung P-harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}$ angegeben. Diese Darstellung findet sich wieder in Satz 3.5 in Abschnitt 3.5. An dieser Stelle wird eine Poissondarstellung P-harmonischer Funktionen bewiesen werden, welche schließlich zu einer Darstellung harmonischer Funktionen auf einem Sierpiński-Raum fortgesetzt wird.

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Manfred Denker ganz herzlich bedanken für seine stets außerordentlich engagierte Betreuung dieser Arbeit und das Verständnis, welches er meiner Situation im vergangenen Jahr entgegenbrachte.

Bei Herrn Prof. Dr. Heinrich Hering möchte ich mich für die Übernahme des Korreferates bedanken.

Mein ganz besonderer Dank gilt außerdem der Begabtenförderung der Konrad-Adenauer-Stiftung e.V. Sie hat mir ein zweijähriges Promotionsstipendium gewährt und dadurch diese Dissertation erst möglich gemacht.

Meinem Lebensgefährten Marcus Allendorf möchte ich danken für die Unterstützung, die er während der Anfertigung dieser Arbeit in vielen Beziehungen leistete, und die Geduld, die er mir gerade in den letzten Wochen entgegenbrachte.

Meinen Eltern Lothar und Christiane bin ich sehr dankbar für die zuverlässige und liebevolle Betreuung meiner Tochter Mia-Philena im vergangenen halben Jahr.

In diesem Sinne bedanke ich mich auch bei Gertraud Allendorf und der Kinderkrippe des Studentenwerks der Universität Göttingen.
Ich danke Brice Franke, Manuel Stadlbauer, Atsushi Imai und ganz besonders Wolfgang Schwarzwäller und Paul Besold für die fruchtbaren Diskussionen und ihre moralische Unterstützung. Schließlich möchte ich mich bei Oliver Schmitt und Arne Bathke für ihre Tipps beim Drucken dieser Arbeit bedanken.

Kapitel 1

Grundlagen

Im vorliegenden Kapitel werden diejenigen Grundbegriffe erörtert, derer man sich im nachfolgenden Kapitel bei der Konstruktion des Poissonrandes bedienen wird. Zunächst wird die dabei verwendete Notation erklärt.

1.1 Notationen und Konventionen

Es bezeichnet $\mathbb{R}_0^+$ die Menge aller nichtnegativen, reellen Zahlen.
Ist ein topologischer Raum X gegeben, so bezeichnet $\mathcal{B}(X)$ die Borelsche σ-Algebra in X und $\mathcal{C}(X)$ die Menge aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf X.
Ist X ein meßbarer Raum, so bezeichnet $\sigma(X)$ immer die zugehörige σ-Algebra in X. Gegebenenfalls wird diese näher spezifiziert sein.
Ist $\big(\Omega, \sigma(\Omega), P\big)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so bezeichet $\mathcal{L}^\infty(\Omega, P)$ die Menge aller reellen, meßbaren, P-fast überall beschränkten Funktionen auf Ω. Weiterhin ist $\mathcal{N}$ die Menge aller meßbaren, reellen Funktionen f auf Ω, welche fast überall gleich Null sind. Zwei Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, P)$ heißen äquivalent, falls es ein $h \in \mathcal{N}$ gibt, so daß $f_1 = f_2 + h$ ist. Mit $L^\infty(\Omega, P) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, P)/\mathcal{N}$ wird die Menge aller Äquivalenzklassen von reellen, meßbaren, P-fast überall beschränkten Funktionen auf Ω bezeichnet. Die Elemente in $L^\infty(\Omega, P)$ werden der Einfachheit halber bisweilen wie Funktionen behandelt.
Die Erwartung bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P wird mit E_P bezeichnet.

Ist $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ eine meßbare Abbildung in einen Meßraum $\big(\Omega', \sigma(\Omega')\big)$, so bezeichnet P_F das Bildmaß von P unter F auf $\sigma(\Omega')$.
Sind μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf Ω, so bezeichnet $\mu \times \nu$ das Produktmaß und $\mu \star \nu$ die Faltung von μ und ν.
Die bedingte Erwartung von X unter der von den Zufallsvariablen $Y_1, \dots , Y_n$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(Y_1, \dots , Y_n)$ wird mit $E(X \,|\, Y_1, \dots , Y_n)$ bezeichnet.
Mit G wird stets eine diskrete Halbgruppe mit neutralem Element e bezeichnet. Für das Produkt von g_1 und g_2 wird $g_1 g_2$ geschrieben. Die Halbgruppe operiert meßbar auf einem G-Raum T. Es ist $\mathcal{E}(G) = \{\eta : G \longrightarrow G \,|\, \eta(gg') = g\eta(g')$ für alle $g, g' \in G, g' \neq e\}$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{E}(G)$.
Ist der G-Raum T mit einem μ-stationären Wahrscheinlichkeitsmaß ν ausgestattet, so wird für jedes $\phi \in L^\infty(T, \nu)$ mit h_ϕ die Funktion $h_\phi(g) = \int_T \phi(gt)\, d\nu(t)$, $g \in G$, bezeichnet.
Für einen auf $(\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \mu^{\mathbb{N}})$ definierten G-wertigen Prozeß $\{\mathbf{X}^n(g)\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit Start in g und eine beschränkte Funktion f auf G ist $w^f(g)$ definiert als der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$, sofern dieser $\mu^{\mathbb{N}}$-fast sicher existiert. In diesem Fall ist h_f auf G definiert gemäß $h_f(g) = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^f(g)$.
Mit $\mathcal{H}$ wird die Menge aller μ-harmonischen Funktionen auf G bezeichnet.
Es ist $\mathcal{Q} = \{Q \subset G \,|\, \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$ existiert $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. für alle $g \in G\}$ eine σ-Algebra in G. Für alle $Q \in \mathcal{Q}$ ist $h_Q = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^{\mathbf{1}_Q}$. Ferner ist $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}} = \{h_Q \,|\, Q \in \mathcal{Q}\}$.
Mit $\mathbf{0}$ wird die Funktion bezeichnet, die auf ganz G verschwindet und mit $\mathbf{1}$ die konstante Funktion, die jedem Halbgruppenelement g den Wert 1 zuweist.
Für zwei Elemente $h_{Q_1}, h_{Q_2} \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ ist $h_{Q_1} \otimes h_{Q_2} = h_{Q_1 \cap Q_2}$, $h_{Q_1} \boxplus h_{Q_2} = h_{Q_1 \triangle Q_2}$ und $h_{Q_1} \otimes^{\mathbf{d}} h_{Q_2} = h_{Q_1 \cup Q_2}$.
Es ist Ω die Menge aller $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$-Ultrafilter, wobei ein $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$-Ultrafilter mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet wird. Mit $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_v$ und $\mathcal{F}$ sind verschiedene σ-Algebren in Ω bezeichnet. Die entsprechende Maße darauf sind ν_0, ν_v und ν.
Der Strukturierung von Beweisen zuliebe werden gelegentlich Hilfssätze formuliert.[1]

[1] Das Ende von Beweisen wird mit dem Symbol $\square$ gekennzeichnet. Das Ende von Beweisen von Hilfssätzen, welche innerhalb des Beweises der jeweils übergeordneten Behauptung verifiziert werden, wird durch das Symbol $\diamond$ kenntlich gemacht.

Die Abkürzung *f.s.* steht für *fast sicher*, *f.ü.* kürzt den Ausdruck *fast überall* ab. Die Kardinalität einer Menge A wird mit card A abgekürzt.

1.2 G-Raum und Faltungsformel

Im vorliegenden Abschnitt soll geklärt werden, was im Rahmen dieser Arbeit unter einer Halbgruppenaktion und einem G-Raum zu verstehen ist. Darüber hinaus wird eine Faltungsformel angegeben, welche über die Verteilung des Produktes einer G-wertigen und einer G-raumwertigen Zufallsvariable Auskunft gibt.

Definition 1.1 *Sei $\big(G, \sigma(G), \circ\big)$ eine meßbare Halbgruppe*[2] *mit neutralem Element*[3] *e und $\big(T, \sigma(T)\big)$ ein meßbarer Raum. Unter einer* Halbgruppenaktion *von G auf T versteht man eine meßbare Abbildung $G \times T \longrightarrow T$, $(g, t) \longmapsto gt$, welche folgende Bedingungen erfüllt:*
HGA(1) *$et = t$ für alle $t \in T$.*
HGA(2) *$g_1(g_2t) = (g_1 \circ g_2)t$ für alle $t \in T$ und alle $g_1, g_2 \in G$.*

Bemerkung 1.1 *Insbesondere ist damit jede der Abbildungen $g : T \longrightarrow T$, $t \longmapsto gt$ meßbar.*

Im folgenden wird die meßbare Halbgruppe $(G, \sigma(G), \circ)$ der Einfachheit halber nur noch mit G und das Produkt $g_1 \circ g_2$ zweier Halbgruppenelemente mit g_1g_2 bezeichnet.

Definition 1.2 *Sei G eine meßbare Halbgruppe. Ein G-*Raum *ist ein Paar, bestehend aus einem meßbaren Raum T und einer Halbgruppenaktion von G auf T.*

Im verbleibenden Teil dieses Kapitels sei G eine **diskrete** Halbgruppe[4] mit neutralem Element e und T ein G-Raum. Es bezeichne ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß

[2] Ein Tripel $(G, \sigma(G), \circ)$ heißt *meßbare Halbgruppe*, falls die Abbildung $G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \longmapsto g \circ h$ meßbar ist.

[3] Das neutrale Element e sei rechts- und linksneutral. Damit ist es insbesondere eindeutig bestimmt.

[4] Bezeichnet man mit $\sigma(G)$ die Potenzmenge von G, so ist das Tupel $\big(G, \sigma(G)\big)$ ein meßbarer Raum.

auf $\sigma(T)$. Ferner sei $\mathcal{E}(G) := \{\eta : G \longrightarrow G \,|\, \eta(gg') = g\eta(g')$ für alle $g, g' \in G,\ g' \neq e\}$ mit der diskreten Topologie versehen und $\mathcal{A} := \mathcal{B}\big(\mathcal{E}(G)\big)$ die Potenzmenge von $\mathcal{E}(G)$. Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$. Dann ist das Tripel $(\mathcal{E}(G), \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Für jedes $g \in G$ bezeichne μ_g das durch die meßbare Abbildung

$$\begin{aligned} g : \mathcal{E}(G) &\longrightarrow G \\ \eta &\longmapsto g(\eta) := \eta(g) \end{aligned}$$

von $\mathcal{E}(G)$ nach $\{\eta(g) \,|\, \eta \in \mathcal{E}(G)\} \subset G$ transportierte Wahrscheinlichkeitsmaß. Folglich gilt für jede beschränkte Funktion f auf G

$$\int_G f(g')\, d\mu_g(g') = \int_{\mathcal{E}(G)} f\big(\eta(g)\big)\, d\mu(\eta).$$

Entsprechend bezeichne ν_g das durch die meßbare Abbildung

$$\begin{aligned} g : T &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto g(t) := gt \end{aligned}$$

von T nach $\{gt \,|\, t \in T\} \subset T$ transportierte Wahrscheinlichkeitsmaß, welches für jede beschränkte und meßbare Funktion k auf T die Gleichung

$$\int_T k(t)\, d\nu_g(t) = \int_T k(gt)\, d\nu(t) \tag{1.1}$$

erfüllt.

Proposition 1.1 *Es seien $(\Omega, \sigma(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $U : \Omega \longrightarrow G$, $Y : \Omega \longrightarrow T$ unabhängige Zufallsvariablen. Für ein beliebiges, aber festes $g \in G$ sei U μ_g-verteilt. Die Zufallsvariable Y sei ν-verteilt. Dann ist UY eine T-wertige Zufallsvariable, deren Verteilung gegeben wird durch*

$$E_P f(UY) = \int_T f(t)\, d(\mu_g \star \nu)(t) := \int_T \int_G f(g't')\, d\mu_g(g') d\nu(t'),$$

wobei f eine beschränkte und meßbare, reellwertige Funktion auf T sei. Man bezeichnet $\mu_g \star \nu$ als die Faltung *von μ_g und ν.*

Beweis: Es ist $\mu_g = P_U$ und $\nu = P_Y$. Das Tupel (U, Y) ist ein $G \times T-$wertiges Zufallselement auf Ω mit Verteilung $\pi = \mu_g \times \nu$. Es sei $A(g,t) = gt$ für alle $g \in G$ und alle $t \in T$. Das Bild π_A des Produktmaßes π unter A wird als die Faltung $\mu_g \star \nu$ von μ_g und ν bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Transformationsformel für Integrale[5] und des Satzes von FUBINI[6] erhält man dann für eine beschränkte Funktion f auf T

$$\begin{aligned} E_P f(UY) = E_P\Big(f\big(A(U,Y)\big)\Big) &= \int_T f(t)\, d(\mu_g \star \nu)(t) \\ &= \int_{G\times T} f\big(A(g',t')\big) d(\mu_g \times \nu)(g',t') \\ &= \int_T \int_G f(g',t')\, d\mu_g(g')\, d\nu(t'). \end{aligned}$$

□

1.3 Definition eines stochastischen Prozesses auf der Halbgruppe

In diesem Abschnitt wird ein stochastischer Prozeß auf der Halbgruppe G eingeführt, welcher im gesamten zweiten Kapitel von grundlegender Bedeutung ist. Anschließend werden Beispiele für diesen Prozeß angegeben.

Im folgenden sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in $\mathcal{E}(G)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \mu^{\mathbb{N}})$ definiert[7]. Nun werde eine Folge von Zufallsvariablen definiert wie folgt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^n := X_n \circ \ldots \circ X_1 : (\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \mu^{\mathbb{N}}) &\longrightarrow \mathcal{E}(G) \\ (\eta_1, \eta_2, \ldots) &\longmapsto \eta_n \circ \ldots \circ \eta_1. \end{aligned}$$

[5]Siehe z.B. BAUER[3], S. 125f.

[6]Siehe z.B. Korollar 23.7 in BAUER[3].

[7]Es bezeichne $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ die kleinste σ-Algebra, bezüglich welcher jedes X_n $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$-$\mathcal{A}$-meßbar ist und $\mu^{\mathbb{N}}$ das gemäß Satz 33.2 in BAUER[2] existierende und eindeutig bestimmte Produktmaß $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ auf $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Hierbei sei $\mu_n = \mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es sei angemerkt, daß $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine homogene Markoffkette ist mit Zustandsraum $\mathcal{E}(G)$, Startverteilung μ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(\eta_1,\eta_2) := \mu^{\mathbb{N}}(\mathbf{X}^n = \eta_2 \,|\, \mathbf{X}^{n-1} = \eta_1) = \mu^{\mathbb{N}}(X_1 \in \{\eta \,|\, \eta \circ \eta_1 = \eta_2\}),$$

wobei $n \geq 2$ und $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{E}(G)$ seien.
Damit ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $g \in G$

$$\begin{array}{rcl} g \circ \mathbf{X}^n =: \mathbf{X}^n(g) : (\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \mu^{\mathbb{N}}) & \longrightarrow & G \\ (\eta_1, \eta_2, \ldots) & \longmapsto & \eta_n\big(\eta_{n-1}\big(\ldots\big(\eta_1(g)\big)\ldots\big)\big) \end{array}$$

als Komposition meßbarer Abbildungen eine Zufallsvariable[8]. Für alle $g \in G$ ist die Folge $\{\mathbf{X}^n(g)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine homogene Markoffkette[9] mit Zustandsraum G und Startverteilung μ_g. Es gilt

$$p'(g_1,g_2) := \mu^{\mathbb{N}}(\mathbf{X}^n(g) = g_2 \,|\, \mathbf{X}^{n-1}(g) = g_1) = \mu^{\mathbb{N}}(X_1 \in \{\eta \,|\, \eta(g_1) = g_2\}),$$

wobei $n \geq 2$ und $g_1, g_2 \in G$ seien.

Beispiele:

- Es sei μ' ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf G und für alle $g \in G$

$$\begin{array}{rcl} \eta_g : G & \longrightarrow & G \\ g' & \longmapsto & g'g. \end{array}$$

  Für alle $g \in G$ sei ferner $\mu(\eta_g) = \mu'(g)$. Dieser Fall entspricht demjenigen Prozeß, der durch die Multiplikation von Halbgruppenelementen charakterisiert ist.

- Für ein $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, sei $\mathfrak{A} = \{1, \ldots, N\}$ ein endliches Alphabet. Es sei $\mathcal{W} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{A}^n$ die Menge aller endlichen Wörter über $\mathfrak{A}$. Für alle $a \in \mathfrak{A}$ werde $a^0 =: \emptyset$ als das *leere Wort* bezeichnet. Es sei $G = \mathcal{W}' := \{\mathbf{w}ab^k \,|\, \mathbf{w} \in \mathcal{W},\ a, b \in \mathfrak{A}, a \neq b, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ die Halbgruppe aller endlichen Wörter über dem Alphabet, die mindestens zwei verschiedene Buchstaben enthalten oder

[8] Siehe z.B. Satz 7.3 in Bauer[3].

[9] In Anlehnung an Kaimanovich[29] wird dieser Prozeß als *Irrfahrt auf G* bezeichnet.

mit dem leeren Wort übereinstimmen. Hierbei sei für zwei Wörter $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in G$ das Produkt $\mathbf{v} \circ \mathbf{w}$ erklärt durch Hintereinanderschaltung der Wörter: $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \mathbf{vw}$. Es sei $\sharp : G \longrightarrow G$ eine Involution mit $\sharp(\mathbf{vw}) =: (\mathbf{vw})^\sharp = \mathbf{vw}^\sharp$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{W}'$, $\mathbf{w} \neq \emptyset$. Ferner sei $\mathcal{E}(\mathcal{W}') := \{\eta_a, \eta_a^\sharp \mid a \in \mathfrak{A}\}$, wobei für alle $a \in \mathfrak{A}$ die Abbildungen η_a und $\eta_a^\sharp$ definiert seien wie folgt:

$$\begin{aligned} \eta_a : G &\longrightarrow G \\ \mathbf{w} &\longmapsto \eta_a(\mathbf{w}) := \mathbf{w}a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_a^\sharp : G &\longrightarrow G \\ \mathbf{w} &\longmapsto \eta_a^\sharp(\mathbf{w}) := \mathbf{w}^\sharp a. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\eta(\mathbf{vw}) = \mathbf{v}\eta(\mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in G$, $\mathbf{w} \neq \emptyset$. Dieses Beispiel macht deutlich, daß man durch die Definition von μ auf $\mathcal{E}(G)$ eine echt größere Klasse von Markoffprozessen auf G untersuchen kann als im Fall der Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes auf der Halbgruppe G.

Fortan wird an den stochastischen Prozeß $\{\mathbf{X}^n(e)\}_{n\in\mathbb{N}}$ folgende Bedingung gestellt:

1. Für alle $g \in G \setminus \{e\}$ sei die Wahrscheinlichkeit, von e aus startend jemals nach g zu gelangen, positiv; es gelte also

$$\mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(e) = g \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\big) > 0. \tag{1.2}$$

1.4 Stationäre Maße und harmonische Funktionen

An dieser Stelle werden μ-stationäre Maße auf dem G-Raum T und μ-harmonische Funktionen auf der Halbgruppe G definiert. Weiterhin wird ein Zusammenhang zwischen meßbaren, beschränkten Funktionen auf einem G-Raum mit μ-stationärem Maß und μ-harmonischen Funktionen nachgewiesen.

Definition 1.3 *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf einem G-Raum T heißt* μ-stationär, *wenn für jedes $g \in G$ gilt $\nu_g = \mu_g \star \nu$.*

Definition 1.4 *Eine Funktion $h : G \to \mathbb{R}$ nennt man μ-*harmonisch*, falls für alle $g \in G$ gilt*

$$h(g) = \int_{\mathcal{E}(G)} h\big(\eta(g)\big)\, d\mu(\eta) = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, h\big(X_1(g)\big). \tag{1.3}$$

Lemma 1.2 *Es sei ν ein μ-stationäres Maß auf T und $\phi : T \to \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar. Dann ist die Funktion $h_\phi : G \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$h_\phi(g) := \int_T \phi(gt)\, d\nu(t) = \int_T \phi(t)\, d\nu_g(t), \;\; g \in G,$$

beschränkt und μ-harmonisch.

Beweis: Mit Proposition 1.1 und dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} h_\phi(g) &= \int_T \phi(t)\, d\nu_g(t) \\ &= \int_T \phi(t)\, d(\mu_g \star \nu)(t) \\ &= \int_T \int_G \phi(g't')\, d\mu_g(g')d\nu(t') \\ &= \int_G h_\phi(g')\, d\mu_g(g') \\ &= \int_{\mathcal{E}(G)} h_\phi\big(\eta(g)\big)\, d\mu(\eta). \end{aligned}$$

□

Definition 1.5 *Es sei T ein G-Raum mit μ-stationärem Maß ν. Man nennt $A \in \sigma(T)$ eine ν-*Nullmenge*, falls $\nu(A) = 0$ ist, und eine T-*Nullmenge*, falls $\nu(gA) = 0$ ist für alle $g \in G$.*

Proposition 1.3 *Es sei T ein G-Raum mit μ-stationärem Maß ν. Eine Menge $A \in \sigma(T)$ ist eine ν-Nullmenge genau dann, wenn A eine T-Nullmenge ist.*

Beweis: Offensichtlich ist jede T-Nullmenge eine ν-Nullmenge. Umgekehrt sei nun A eine ν-Nullmenge. Dann gilt $\nu(A) = \nu_e(A) = (\mu_e \star \nu)(A) = 0$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mu_e \star \nu(A) &= \int_T \mathbb{1}_A(t)\, d(\mu_e \star \nu)(t) \\ &= \int_T \int_G \mathbb{1}_A(gt)\, d\mu_e(g)d\nu(t) \end{aligned}$$

$$= \int_T \int_{\mathcal{E}(G)} \mathbb{1}_A\big(\eta(e)t\big)\, d\mu(\eta) d\nu(t).$$

Da $\mathbb{1}_A$ nichtnegativ ist, muß für alle $\eta \in \mathcal{E}(G)$ mit $\mu(\eta) > 0$ gelten $\nu\big(\eta(e)A\big) = 0$. Induktiv erhält man dann für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Folge $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ in $\mathcal{E}(G)$ mit $\mu(\eta_i) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ die Gleichheit $\nu(\eta_n \circ \ldots \circ \eta_1(e)A) = 0$. Nach Voraussetzung ist $\mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(e) = g \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\big) > 0$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$. Damit existiert für jedes $g \in G \setminus \{e\}$ mindestens eine Folge $\eta_1, \ldots, \eta_n$ in $\mathcal{E}(G)$, $n = n(g) \in \mathbb{N}$, so daß $\mu(\eta_i) > 0$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$ und $\eta_n \circ \ldots \circ \eta_1(e) = g$ ist. Also gilt $\nu(gA) = 0$ für alle $g \in G$. □

Bemerkung 1.2 *Mit Proposition* 1.3 *verallgemeinert sich* (1.1) *zu*

$$\int_T k(gt)\, d\nu(t) = \int_T k(t)\, d\nu_g(t) \text{ für alle } k \in \mathcal{L}^\infty(T,\nu). \tag{1.4}$$

Außerdem führt Proposition 1.3 Lemma 1.2 über in folgende Behauptung:

Korollar 1.4 *Es sei ν ein μ-stationäres Maß auf einem G-Raum T und die Funktion $\phi \in \mathcal{L}^\infty(T,\nu)$. Dann ist die Funktion h_ϕ, definiert wie in Lemma* 1.2, *beschränkt und μ-harmonisch.*

Proposition 1.5 *Sei T ein G-Raum und ν ein μ-stationäres Maß auf T. Für alle $\phi \in \mathcal{L}^\infty(T,\nu)$ sei h_ϕ definiert wie in Lemma* 1.2. *Stimmen $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L}^\infty(T,\nu)$ ν-f.s. überein, so gilt $h_{\phi_1} = h_{\phi_2}$.*

Beweis: Sei $\phi_1 - \phi_2 = 0$ ν-f.s., d.h. $\phi_1 - \phi_2$ verschwindet außerhalb einer ν-Nullmenge A. Gemäß Proposition 1.3 gilt dann für alle $g \in G$

$$\begin{aligned} h_{\phi_1}(g) - h_{\phi_2}(g) &= \int_T (\phi_1 - \phi_2)(gt)\, d\nu(t) \\ &= \int_A (\phi_1 - \phi_2)(gt)\, d\nu(t) \\ &= \int_{gA} (\phi_1 - \phi_2)(t)\, d\nu(t) = 0, \end{aligned}$$

da $\nu(gA) = 0$ ist. □

Es sei

$$\mathcal{H} := \{h : G \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, h \text{ ist beschränkt und } \mu\text{-harmonisch}\}.$$

Gemäß Korollar 1.4 und Proposition 1.5 korrespondiert jeder G-Raum T mit einem μ-stationären Maß ν über eine lineare Abbildung J_T auf $L^\infty(T,\nu)$ zu einer Teilmenge der harmonischen Funktionen auf G. Daher wird jetzt folgende Definition getroffen:

$$\mathcal{H}_T := \{J_T(\phi) := h_\phi(\cdot) := \int_T \phi(\cdot\, t)\, d\nu(t) \mid \phi \in L^\infty(T,\nu)\} \subset \mathcal{H}.$$

1.5 Ränder der Halbgruppe

In diesem Abschnitt wird erklärt, was unter einem Rand der Halbgruppe zu verstehen ist.

Es sei T ein G-Raum und ν ein μ-stationäres Maß auf T. Im allgemeinen muß die am Ende von Abschnitt 1.4 definierte Abbildung J_T nicht injektiv sein, d.h. für zwei verschiedene Funktionen $\phi_1 \neq \phi_2 \in L^\infty(T,\nu)$ kann $h_{\phi_1} = h_{\phi_2}$ gelten. Diese Eigenschaft ist für einen Rand von G unerwünscht. Daher trifft man folgende Definition:

Definition 1.6 *Unter einem* Rand (T,ν) von G *versteht man einen G-Raum T mit einem μ-stationären Wahrscheinlichkeitsmaß ν und der Eigenschaft, daß die Abbildung $J_T : L^\infty(T,\nu) \longrightarrow \mathcal{H}_T$, $\phi \longmapsto J_T(\phi)$, injektiv ist.*

Bemerkung 1.3 *Insbesondere ist J_T in diesem Fall also ein Isomorphismus nach $\mathcal{H}_T$.*

Für alle $g \in G$ und jeden Rand (T,ν) von G sei eine Abbildung auf $L^\infty(T,\nu)$ definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} g : L^\infty(T,\nu) &\longrightarrow L^\infty(T,\nu) \\ f &\longmapsto g(f) := f \circ g. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Definition 1.7 *Es seien (T,ν) und (T',ν') Ränder von G. Man nennt (T',ν') ein* äquivariantes Bild von (T,ν), *falls eine isomorphe Abbildung θ von $L^\infty(T',\nu')$ in eine Unteralgebra von $L^\infty(T,\nu)$ existiert, so daß für alle $f \in L^\infty(T',\nu')$ die Gleichheit $\int_{T'} f(t')\, d\nu'(t') = \int_T \theta(f)(t)\, d\nu(t)$ gilt und folgendes Diagramm für alle $g \in G$ kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} L^\infty(T',\nu') \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta"'] & L^\infty(T',\nu') \arrow[d, "\theta"] \\ L^\infty(T,\nu) \arrow[r, "g"'] & L^\infty(T,\nu) \end{tikzcd}$$

Mit anderen Worten: für $\phi \in \mathcal{L}^\infty(T',\nu')$ *gilt* $g\big(\theta(f)\big)(t) = \theta\big(g(f)\big)(t)$ ν*-f.s.*

Definition 1.8 *Es sei* (T,ν) *ein Rand von* G*. Man nennt* (T,ν) maximal*, falls jeder andere Rand von* G *ein äquivariantes Bild von* (T,ν) *ist.*

Kapitel 2

Die Poissondarstellung harmonischer Funktionen auf einer Halbgruppe

Aus Abschnitt 1.5 ist bekannt, daß für jeden Rand (T, ν) der Halbgruppe G der Raum $L^\infty(T, \nu)$ zu einer Unteralgebra $\mathcal{H}_T$ der harmonischen Funktionen auf G isomorph ist. Ziel dieses Kapitels ist es, einen Rand (P, m) von G zu konstruieren mit der Eigenschaft, daß $L^\infty(P, m)$ isomorph ist zu $\mathcal{H}$ selbst, d.h., daß zu jeder beschränkten, μ-harmonischen Funktion h auf G eine Funktion ϕ_h auf P existiert, so daß sich h wie folgt darstellen läßt:

$$h(g) = \int_P \phi_h(gt)\, dm(t).$$

Dieser Rand wird maßtheoretisch eindeutig sein und in Analogie zu [18] als der *Poissonrand* von G bezeichnet werden.

2.1 Der Grenzwert harmonischer Funktionen

Gemäß der Definition harmonischer Funktionen in Abschnitt 1.4 gilt für alle $g \in G$ die Gleichung $h(g) = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, h\big(X_1(g)\big)$[1]. Der Beweis des nachfolgenden Lemmas zeigt unter anderem, daß man in dieser Gleichung den Zeitpunkt, in dem sich

[1] Siehe (1.3).

der Prozeß befindet (hier 1), beliebig wählen kann, und daß diese Gleichheit auch dann noch richtig ist, wenn man den Erwartungswert des Grenzwertes der harmonischen Funktion, angewendet auf den Prozeß, betrachtet.

Lemma 2.1 (a) $h : G \to \mathbb{R}$ *sei beschränkt und* μ*-harmonisch. Dann existiert für alle* $g \in G$ *der Grenzwert*

$$w^h(g) := \lim_{n\to\infty} h\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$$

$\mu^{\mathbb{N}}$*-fast sicher.*
(b) *Weiter gilt* $E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^h(g) = h(g)$ *für alle* $g \in G$.

Beweis:
ad (a) Sei $g \in G$ beliebig, aber fest. Man definiere die Folge

$$w_n^h(g) := h\big(\mathbf{X}^n(g)\big) : (\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \mu^{\mathbb{N}}) \longrightarrow \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

von Zufallsvariablen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, ..., X_n)$ die von den Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ erzeugte σ-Algebra. Zunächst wird gezeigt, daß $w_n^h(g)$ ein $\mathcal{F}_n$-adaptiertes Martingal ist, d.h., daß $w_n^h(g)$ $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-meßbar ist und für alle $A \in \mathcal{F}_{n-1}$ und für alle $n \geq 2$ die Gleichung

$$\int_A w_n^h(g)\, d\mu^{\mathbb{N}} \quad = \quad \int_A w_{n-1}^h(g)\, d\mu^{\mathbb{N}}$$

erfüllt.
Es sei $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Als Komposition meßbarer Abbildungen ist $w_n^h(g)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{B}$-meßbar.
Für $A \in \mathcal{F}_{n-1}$ existiert eine meßbare Funktion $\phi : (\mathcal{E}(G)^{n-1}, \mathcal{A}^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so daß $\mathbb{1}_A = \phi(X_1, \ldots, X_{n-1})$ ist[2]. Damit gilt

$$\begin{aligned} &\int_A w_n^h(g)\, d\mu^{\mathbb{N}} = \\ = \ &\int_{\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}} \phi(X_1, \ldots, X_{n-1})\, h\big(\mathbf{X}^n(g)\big)\, d\mu^{\mathbb{N}} \\ = \ &\int_{\mathcal{E}(G)^n} \phi(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})\, h\big(\eta_n \circ \ldots \circ \eta_1(g)\big)\, d\mu^n(\eta_1, \ldots, \eta_n) \end{aligned}$$

[2]Siehe Faktorisierungslemma 11.7 in Bauer[3].

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{E}(G)^{n-1}} \phi(\eta_1,\dots,\eta_{n-1}) \int_{\mathcal{E}(G)} h\big(\eta_n \circ \dots \circ \eta_1(g)\big)\, d\mu(\eta_n) d\mu^{n-1}(\eta_1,\dots,\eta_{n-1}) \\
&= \int_{\mathcal{E}(G)^{n-1}} \phi(\eta_1,\dots,\eta_{n-1}) h\big(\eta_{n-1} \circ \dots \circ \eta_1(g)\big)\, d\mu^{n-1}(\eta_1,\dots,\eta_{n-1}) \\
&= \int_{\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}} \phi(X_1,\dots,X_{n-1})\, h\big(\mathbf{X}^{n-1}(g)\big)\, d\mu^{\mathbb{N}} \\
&= \int_A w_{n-1}^h(g)\, d\mu^{\mathbb{N}}.
\end{aligned}
$$

Dabei beachte man die μ-Harmonizität von h und die Tatsache, daß das Bildmaß $\mu^{\mathbb{N}}_{(X_1,\dots,X_n)}$ von $\mu^{\mathbb{N}}$ unter der Abbildung $(X_1,\dots,X_n)$ gerade μ^n ist.
Nach Voraussetzung ist h beschränkt. Also ist $w_n^h(g)$ integrierbar und gleichmäßig beschränkt in n. Folglich ist $\{w_n^h(g)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. Nach dem Konvergenzsatz für gleichgradig integrierbare Martingale[3] existiert also eine reelle, $\mu^{\mathbb{N}}$-integrierbare Funktion $w^h(g)$, so daß $\lim_{n\to\infty} w_n^h(g) = w^h(g)$ $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkung 2.1 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ gilt damit $E_{\mu^{\mathbb{N}}}\left(w^h(g) \mid \mathcal{F}_n\right) = w_n^h(g)$.*

ad (b) Zunächst werde nachgewiesen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$h(g) = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w_n^h(g). \tag{2.1}$$

Für $n = 1$ stimmt diese Aussage mit (1.3) überein. Da h μ-harmonisch ist, gilt

$$h\big(\mathbf{X}^n(g)\big) = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\Big(h\big(\mathbf{X}^{n+1}(g)\big) \mid X_1,\dots,X_n\Big)\ \mu^{\mathbb{N}}\text{-f.s.}$$

Daraus folgt dann mit der Induktionsvoraussetzung

$$
\begin{aligned}
h(g) &= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w_n^h(g) \\
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, h\big(\mathbf{X}^n(g)\big) \\
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\Big(E_{\mu^{\mathbb{N}}}\Big(h\big(\mathbf{X}^{n+1}(g)\big) \mid X_1,\dots,X_n\Big)\Big) \\
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, h\big(\mathbf{X}^{n+1}(g)\big) \\
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w_{n+1}^h(g),
\end{aligned}
$$

wobei man Gleichung (34.4)[4] in Billingsley[5] und die Integrierbarkeit von $w_{n+1}^h(g)$ benutzt.

[3]Siehe Satz 10.4 in Kapitel II in Denker & Krengel[8].

[4]Es sei X eine integrierbare Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{J}, P)$ und $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra in $\mathcal{J}$. Dann gilt $E_P\big(E_P(X \mid \mathcal{G})\big) = E_P(X)$.

Aus (2.1) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz[5] folgt dann

$$h(g) = \lim_{n\to\infty} E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w_n^h(g) = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^h(g). \qquad \square$$

2.2 Konstruktion harmonischer Funktionen

In diesem Abschnitt werden beliebige beschränkte Funktionen auf der Halbgruppe auf den Prozeß angewendet. Es wird sich zeigen, daß die Erwartung des Grenzwertes, sofern dieser für alle $g \in G$ fast sicher existiert, μ-harmonisch ist. Im Anschluß daran wird auf der Menge der μ-harmonischen Funktionen eine Multiplikation definiert, welche diese Menge mit einer Algebrastruktur versieht.

Aus strukturellen Gründen werden zunächst zwei Hilfssätze ohne Beweis vorangestellt:

Hilfssatz 2.2 *Es seien $U_1, \dots, U_l$, $l \geq 2$, unabhängige, $\mathcal{E}(G)$-wertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \sigma(\Omega), P)$ mit Verteilung $P_{U_i} = \mu_i$, $i = 1, \dots, l$. Es bezeichne $\mu_1 \star \dots \star \mu_l$ die Verteilung der $\mathcal{E}(G)$-wertigen Zufallsvariablen $U_1 \circ \dots \circ U_l$. Dann gilt für alle $g \in G$*

$$\begin{aligned} E_P f\big(U_1 \circ \dots \circ U_l(g)\big) &= \int_{\mathcal{E}(G)} f\big(\eta(g)\big)\, d(\mu_1 \star \dots \star \mu_l)(\eta) \\ &:= \int_{\mathcal{E}(G)} \dots \int_{\mathcal{E}(G)} f\big(\eta_1 \circ \dots \circ \eta_l(g)\big)\, d\mu_1(\eta_1) \dots d\mu_l(\eta_l), \end{aligned}$$

wobei f eine reellwertige, beschränkte und $\mathcal{A}$-meßbare Funktion auf $\mathcal{E}(G)$ ist.

Damit ist die Verteilung von $X_{m+n} \circ \dots \circ X_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, also insbesondere für $\mathbf{X}^n$, durch

$$\mu^{\mathbb{N}}_{X_{m+n}\circ\dots\circ X_{m+1}} = \underbrace{\mu \star \dots \star \mu}_{n-\text{mal}} =: \mu_n^\star \tag{2.2}$$

gegeben.

[5] Siehe Satz 5.2 in Kapitel IV,§5.4, in Elstrodt[14].

Hilfssatz 2.3 *Es sei X_0 eine von den X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige, $\mathcal{E}(G)$-wertige Zufallsvariable auf $\hat{\Omega}$ mit Verteilung $\hat{P}_{X_0} = \mu$. Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. Existiert $\lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$ $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. für alle $g \in G$, so existiert $\lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n \circ X_0(g)\big)$ $\mu^{\mathbb{N}} \times \hat{P}$-f.s. für alle $g \in G$ und die Zufallsvariablen $\lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$ und $\lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n \circ X_0(g)\big)$, $g \in G$, besitzen dieselbe Verteilung.*

Lemma 2.4 *Es sei $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn für alle $g \in G$ der Grenzwert $w^f(g) := \lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$ $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. existiert, so ist die Funktion*

$$\begin{aligned} E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^f : G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^f(g) \end{aligned}$$

beschränkt und μ-harmonisch.

Beweis: Die Beschränktheit folgt unmittelbar aus der Beschränktheit von f. Bevor die μ-Harmonizität nachgewiesen wird, sollen einige vorbereitende Bemerkungen gemacht werden: Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz konvergiert die Folge $\{f\big(\mathbf{X}^n(g)\big)\}_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $g \in G$ im Mittel gegen $w^f(g)$. Für alle $A \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ gilt damit[6]

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f\big(\mathbf{X}^n(g)\big)\, d\mu^{\mathbb{N}} = \int_A w^f(g)\, d\mu^{\mathbb{N}},$$

also insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, f\big(\mathbf{X}^n(g)\big) = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^f(g). \tag{2.3}$$

Sei nun X_0 eine wie in Hilfssatz 2.3 angegebene Zufallsvariable. Dann existiert $\lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n \circ X_0(g)\big)$ $\mu^{\mathbb{N}} \times \hat{P}$-f.s. Daraus folgt, mit dem gleichen Argument wie oben, für alle $g \in G$

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mu^{\mathbb{N}}\times\hat{P}} f\big(\mathbf{X}^n \circ X_0(g)\big) = E_{\mu^{\mathbb{N}}\times\hat{P}} \lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n \circ X_0(g)\big). \tag{2.4}$$

Nun muß nachgewiesen werden, daß

$$E_{\hat{P}}\Big(E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^f\big(X_0(g)\big)\Big) = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^f(g)$$

[6] Siehe Satz 15.1 in Bauer[3].

gilt. Auf die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(\eta_0) := E_{\mu^{\mathbb{N}}} f\Big(\mathbf{X}^n\big(\eta_0(g)\big)\Big)$, $\eta_0 \in \mathcal{E}(G)$, läßt sich der Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden, da $\mathcal{E}(G)$ diskret und f beschränkt ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
E_{\hat{P}}\Big(E_{\mu^{\mathbb{N}}} w^f\big(X_0(g)\big)\Big) &= \int_{\hat{\Omega}} E_{\mu^{\mathbb{N}}} w^f\big(X_0(\omega)(g)\big)\, d\hat{P}(\omega) \\
&= \int_{\mathcal{E}(G)} E_{\mu^{\mathbb{N}}} w^f\big(\eta_0(g)\big)\, d\mu(\eta_0) \\
&= \int_{\mathcal{E}(G)} \lim_{n\to\infty} E_{\mu^{\mathbb{N}}} f\Big(\mathbf{X}^n\big(\eta_0(g)\big)\Big)\, d\mu(\eta_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{E}(G)} \int_{\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}} f\Big(\mathbf{X}^n(\eta)\big(\eta_0(g)\big)\Big)\, d\mu^{\mathbb{N}}(\eta) d\mu(\eta_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{E}(G)} \int_{\mathcal{E}(G)} f\Big(\bar{\eta}\big(\eta_0(g)\big)\Big)\, d\mu_n^{\star}(\bar{\eta}) d\mu(\eta_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{E}(G)} f\big(\tilde{\eta}(g)\big)\, d(\mu_n^{\star} \star \mu)(\tilde{\eta}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}\times\hat{\Omega}} f\big(\mathbf{X}^n \circ X_0(g)\big)\, d\mu^{\mathbb{N}} d\hat{P} \\
&= \lim_{n\to\infty} E_{\mu^{\mathbb{N}}\times\hat{P}} f\big(\mathbf{X}^n \circ X_0(g)\big) \\
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}\times\hat{P}} \lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n \circ X_0(g)\big) \\
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n(g)\big) \\
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}} w^f(g),
\end{aligned}$$

wobei man (2.2) - (2.4) und die Hilfssätze 2.2 und 2.3 benutzt. □

Nachstehend aufgeführtes Lemma ist insbesondere beweistechnisch von Bedeutung.

Lemma 2.5 *Es sei $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$ existiere $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. Für alle $g \in G$ sei außerdem $h_f(g) := E_{\mu^{\mathbb{N}}} w^f(g)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n(g)\big) = w^f(g) = w^{h_f}(g) = \lim_{n\to\infty} h_f\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$ $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s.*

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
h_f\big(\mathbf{X}^n(g)\big) &= h_f\big(X_n \circ \ldots \circ X_1(g)\big) \\
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\Big(\lim_{m\to\infty} f\big(X_{n+m} \circ \ldots \circ X_{n+1} \circ X_n \circ \ldots \circ X_1(g)\big) \,|\, X_1, \ldots, X_n\Big) \\
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\Big(w^f(g) \,|\, X_1, \ldots, X_n\Big).
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h_f\big(\mathbf{X}^n(g)\big) &= \lim_{n\to\infty} E_{\mu^{\mathbb{N}}}\Big(w^f(g)\,|\,X_1,\dots,X_n\Big)\\ &= w^f(g)\\ &= \lim_{n\to\infty} f\big(\mathbf{X}^n(g)\big)\ \mu^{\mathbb{N}}\text{-f.s.}\end{aligned}$$ □

Die Menge $\mathcal{H}$ der μ-harmonischen Funktionen auf G ist bezüglich punktweise definierter Multiplikation nicht abgeschlossen.
Im folgenden soll gezeigt werden, daß für $f,h \in \mathcal{H}$ jedoch die Funktion $E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^{f\cdot h}$ μ-harmonisch ist. Vorab werde dazu folgende Bemerkung gemacht:

Bemerkung 2.2 *Es seien $f,h \in \mathcal{H}$. Dann konvergiert $f\cdot h\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$ für alle $g\in G$ $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. gegen $w^f(g)\cdot w^h(g)$, d.h. es ist $w^{f\cdot h}(g) = w^f(g)w^h(g)$ $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s.*

Der **Beweis** ist elementar und wird an dieser Stelle daher nicht ausgeführt. □

Nun wird ein Produkt auf $\mathcal{H}$ definiert wie folgt: Für zwei Funktionen $f,h\in\mathcal{H}$ und alle $g\in G$ sei

$$f\otimes h(g) := E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^{f\cdot h}(g) = E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^f(g)w^h(g).$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 2.4 erhält man damit die Abgeschlossenheit von $\mathcal{H}$ unter $\otimes$:

Lemma 2.6 *Für $f,h\in\mathcal{H}$ ist $f\otimes h\in\mathcal{H}$.*

Diesen Abschnitt abschließend sei noch eine Bemerkung über die Struktur von $\mathcal{H}$ gemacht:

Bemerkung 2.3 $(\mathcal{H},+,\otimes)$ *ist eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra.*

Beweis: Lediglich der Beweis der Assoziativität bezüglich der Multiplikation $\otimes$ erweist sich als nicht trivial. Im Laufe dieses Beweises werde mit $E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{X}^n}$ diejenige Erwartung bezeichnet, die sich aus einer Integration über die Zufallsvariable $\mathbf{X}^n$ ergibt. Entsprechend bezeichne $E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{Y}^m}$ die Erwartung, die sich durch Integration über die Zufallsvariable $\mathbf{Y}^m := Y_m\circ\ldots\circ Y_1$ berechnet, wobei $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{E}(G)$-wertigen, unabhängigen Zufallsvariablen auf $\mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}$ mit Verteilung μ

ist, welche von der Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig ist. Gemäß Lemma 2.5 gilt für Funktionen $f, g \in \mathcal{H}$ und alle $u \in G$

$$\lim_{n\to\infty} f\cdot g\big(\mathbf{X}^n(u)\big) = \lim_{n\to\infty} E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{Y}^m} \lim_{m\to\infty} f\cdot g\left(\mathbf{Y}^m \circ \mathbf{X}^n(u)\right)\ \mu^{\mathbb{N}}\text{-f.s.} \tag{2.5}$$

Daraus folgt für $f, g, h \in \mathcal{H}$ und $u \in G$

$$\begin{aligned}
& \big((f\otimes g)\otimes h\big)(u) - \big(f\otimes(g\otimes h)\big)(u) = \\
= \ & E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^{f\otimes g} w^h(u) - E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^f w^{g\otimes h}(u) \\
= \ & E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{X}^n} \lim_{n\to\infty} \Big(f\otimes g\big(\mathbf{X}^n(u)\big)\, h\big(\mathbf{X}^n(u)\big)\Big) - \\
& - E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{X}^n} \lim_{n\to\infty} \Big(f\big(\mathbf{X}^n(u)\big)\, g\otimes h\big(\mathbf{X}^n(u)\big)\Big) \\
= \ & E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{X}^n} \lim_{n\to\infty} \Big(\big[E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{Y}^m} \lim_{m\to\infty} f\cdot g\big(\mathbf{Y}^m\circ\mathbf{X}^n(u)\big)\big]\, h\big(\mathbf{X}^n(u)\big)\Big) - \\
& - E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{X}^n} \lim_{n\to\infty} \Big(f\big(\mathbf{X}^n(u)\big)\, \big[E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{Y}^m} \lim_{m\to\infty} g\cdot h\big(\mathbf{Y}^m\circ\mathbf{X}^n(u)\big)\big]\Big) \\
= \ & E_{\mu^{\mathbb{N}}}{}^{\mathbf{X}^n} \lim_{n\to\infty} \Big(f\cdot g\big(\mathbf{X}^n(u)\big)\, h\big(\mathbf{X}^n(u)\big) - f\big(\mathbf{X}^n(u)\big)\, g\cdot h\big(\mathbf{X}^n(u)\big)\Big) \qquad (2.6) \\
= \ & 0,
\end{aligned}$$

wobei (2.6) aus (2.5) folgt. □

2.3 Verallgemeinerte Indikatorfunktionen

Im vorliegenden Abschnitt wird eine σ-Algebra in G definiert. Unter Berücksichtigung von Lemma 2.4 wird man über diese σ-Algebra eine Teilmenge der μ-harmonischen Funktionen erhalten. Es wird sich herausstellen, daß die Eigenschaften der Elemente dieser Menge mit denen von Indikatorfunktionen in vielen Punkten vergleichbar sind, obgleich sie $[0, 1]$-wertig sind. Diese *verallgemeinerten Indikatorfunktionen* werden bei der Herleitung der Integraldarstellung μ-harmonischer Funktionen in Abschnitt 2.7 dieselbe Rolle spielen wie die Indikatorfunktionen bei der Definition des Integrals von Funktionen auf einem beliebigen Maßraum[7].

Im verbleibenden Teil dieses Kapitels sei

$$\mathcal{Q} := \{Q \subset G \mid \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(\mathbf{X}^n(g)\big) = w^{\mathbb{1}_Q}(g) \text{ existiert } \mu^{\mathbb{N}}\text{-}f.s. \text{ für alle } g \in G\}.$$

[7] Man vergleiche z.B. Kapitel II in BAUER[3].

Einfaches Nachrechnen liefert sofort die folgende Proposition.

Proposition 2.7 *$\mathcal{Q}$ ist eine σ-Algebra in G.*

Gemäß Lemma 2.4 ist für alle $Q \in \mathcal{Q}$ die Funktion $h_{1_Q} = E_{\mu^{\mathbb{N}}} w^{1_Q} =: h_Q$ beschränkt und μ-harmonisch.
Es sei

$$\begin{aligned} D : \mathcal{Q} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{Q}} := \{h_Q \,|\, Q \in \mathcal{Q}\} \\ Q &\longmapsto h_Q. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4 *Die Abbildung D ist nicht notwendig injektiv.*

Von nun an bezeichne $\mathbf{0}$ die Nullfunktion auf G.

Proposition 2.8 *Für $Q \in \mathcal{Q}$ gilt $h_Q(e) = 0$ genau dann, wenn $h_Q = \mathbf{0}$ ist.*

Beweis: Gemäß (2.1) gilt $h_Q(e) = E_{\mu^{\mathbb{N}}} h_Q\big(\mathbf{X}^n(e)\big) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da h_Q nichtnegativ ist, folgt daraus $h_Q\big(\mathbf{X}^n(e)\big) = 0$ $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$. Unter Berücksichtigung von (1.2) erhält man dann die Behauptung. □

Die anschließende Proposition ist insbesondere für den Beweis des folgenden Lemmas wichtig. Die Behauptung ist aber auch für sich alleine gesehen von Interesse.

Proposition 2.9 *Für alle $Q \in \mathcal{Q}$ gilt $\sup_{g \in G} h_Q(g) = 1$ genau dann, wenn $h_Q(e) \neq 0$ ist.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Für den Beweis der Gegenrichtung mache man sich klar, daß für alle $Q \in \mathcal{Q}$, $g \in G$ und $m \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(g) \in Q\big) = \lim_{n\to\infty} \mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^{n+k}(g) \in Q \text{ für } k = 0, \ldots, m\big)$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 < \beta := h_Q(e) &= E_{\mu^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(\mathbf{X}^n(e)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(e) \in Q\big) \\ &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^{n+k}(e) \in Q \text{ für } k = 0, \ldots, m\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \int_Q \cdots \int_Q d\mu^{\mathbb{N}}_{\left(\mathbf{X}^{n+m}(e),\dots,\mathbf{X}^n(e)\right)}(q_m,\dots,q_0)\\
&= \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \int_Q \mu^{\mathbb{N}}\left(\mathbf{X}^k(q_0)\in Q \text{ für } k=1,\dots,m\right) d\mu^{\mathbb{N}}_{\mathbf{X}^n(e)}(q_0)\\
&= \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \int_Q s^m_{q_0}\, d\alpha^n_{q_0},
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
s^m_{q_0} &:= \mu^{\mathbb{N}}\left(\mathbf{X}^k(q_0)\in Q \text{ für } k=1,\dots,m\right) \text{ und}\\
\alpha^n_{q_0} &:= \mu^{\mathbb{N}}_{\mathbf{X}^n(e)}(q_0)
\end{aligned}
$$

ist. Dabei berücksichtige man die Tatsache, daß die X_n, $n\in\mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilt sind. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{n\to\infty}\int_Q d\mu^{\mathbb{N}}_{\mathbf{X}^n(e)}(q_0)=\beta$. Nun ist $\{s^m_{q_0}\}_{m\in\mathbb{N}}$ für alle $q_0\in Q$ eine nach unten durch 0 beschränkte monoton fallende Folge. Somit existiert für alle $q_0\in Q$ der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} s^m_{q_0}$. Existierte nun ein s mit $0\le s<1$, so daß $\lim_{m\to\infty} s^m_{q_0}\le s$ für alle $q_0\in Q$ wäre, so folgte

$$
\beta = \lim_{n\to\infty}\int_Q \lim_{m\to\infty} s^m_{q_0}\, d\alpha^n_{q_0} \le s\beta,
$$

was der Annahme $s<1$ widerspricht. Also kann $\lim_{m\to\infty} s^m_{q_0}$ nicht gleichmäßig in Q von 1 weg beschränkt sein. Damit existiert für alle $\varepsilon>0$ ein $q_0^*\in Q$, so daß $\lim_{m\to\infty} s^m_{q_0^*}\ge 1-\varepsilon$ ist. Nach Definition von $s^m_{q_0^*}$ gilt dann aber erst recht $\lim_{m\to\infty}\mu^{\mathbb{N}}\left(\mathbf{X}^m(q_0^*)\in Q\right)=h_Q(q_0^*)\ge 1-\varepsilon$. □

Nachstehend werden Eigenschaften von $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ aufgelistet, die deutlich machen, daß man die Elemente in $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ als verallgemeinerte Indikatorfunktionen auffassen kann.

Lemma 2.10 *Das System $(\mathcal{H}_{\mathcal{Q}},+,\otimes)$ hat folgende Eigenschaften:*
(1) *Die Funktion $\mathbf{1}: G\longrightarrow\mathbb{R}$, $\mathbf{1}(g)=1$ für alle $g\in G$, ist in $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ enthalten.*
(2) *Mit $h_Q\in\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ gilt auch $h_{Q^C}=\mathbf{1}-h_Q\in\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ für alle $Q\in\mathcal{Q}$.*
(3) *Für paarweise disjunkte $Q_i\in\mathcal{Q}$, $i\in\mathbb{N}$, ist $\sum_{i=1}^{\infty} h_{Q_i} = h_{\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i}\in\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$.*
(4) *Für alle $Q_1,Q_2\in\mathcal{Q}$ gilt $h_{Q_1}\otimes h_{Q_2}=h_{Q_1\cap Q_2}\in\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$. Insbesondere sind die Elemente in $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ idempotent, d.h. für alle $Q\in\mathcal{Q}$ gilt $h_Q\otimes h_Q=h_Q$.*
(5) *Sind $Q_1,Q_2\in\mathcal{Q}$, $Q_1\subset Q_2$, so ist $h_{Q_1}\le h_{Q_2}$.*

(6) *Es gilt* $h_Q \leq h_P$ *für* $Q, P \in \mathcal{Q}$ *genau dann, wenn* $h_{Q \setminus P} = \mathbf{0}$ *ist.*
(7) *Es seien* $Q_1, Q_2, P_1, P_2 \in \mathcal{Q}$ *und* $h_{Q_1} \leq h_{P_1}$, $h_{Q_2} \leq h_{P_2}$. *Dann gilt* $h_{Q_1} \otimes h_{Q_2} \leq h_{P_1} \otimes h_{P_2}$.

Beweis: Die Aussagen (1) bis (3) und (5) sind offensichtlich richtig.
ad (4) Gemäß Lemma 2.5 gilt für alle $Q \in \mathcal{Q}$ und $g \in G$ $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. die Gleichheit $w^{\mathbf{1}_Q}(g) = w^{h_Q}(g)$. Daraus folgt für $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$

$$\begin{aligned} D(Q_1 \cap Q_2) = h_{Q_1 \cap Q_2} &= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^{\mathbf{1}_{Q_1 \cap Q_2}} \\ &= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^{\mathbf{1}_{Q_1}} w^{\mathbf{1}_{Q_2}} \\ &= E_{\mu^{\mathbb{N}}}\, w^{h_{Q_1}} w^{h_{Q_2}} \\ &= h_{Q_1} \otimes h_{Q_2}. \end{aligned}$$

ad (6) Zunächst sei $h_{Q \setminus P} = \mathbf{0}$. Dann folgt aus (3) und (5) $h_Q = h_{Q \cap P} + h_{Q \setminus P} = h_{Q \cap P} \leq h_P$.
Nun werde die Notwendigkeit der Bedingung für die Ungleichung nachgewiesen: Aus (3) folgt

$$\begin{aligned} h_Q &= h_{Q \cap P} + h_{Q \setminus P} + h_{P \setminus Q} - h_{P \setminus Q} \\ &= h_P + h_{Q \setminus P} - h_{P \setminus Q}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die Differenz $h_{Q \setminus P}(g) - h_{P \setminus Q}(g) \leq 0$ für alle $g \in G$. Gemäß Proposition 2.9 ist dies jedoch nur möglich, falls $h_{Q \setminus P} = \mathbf{0}$ ist. (Andernfalls ließe sich, da $Q \setminus P$ und $P \setminus Q$ disjunkt sind - also $h_{Q \setminus P} + h_{P \setminus Q} \leq 1$ erfüllt ist - , ein $g \in G$ finden, so daß die Differenz positiv wäre.)

ad (7) Zunächst werde eine zu $\otimes$ duale Operation $\otimes^{\mathbf{d}}$ eingeführt gemäß

$$h_{Q_1} \otimes^{\mathbf{d}} h_{Q_2} := h_{Q_1 \cup Q_2}. \tag{2.7}$$

(In Abschnitt 2.4 wird hierauf noch einmal näher eingegangen.) Nach Voraussetzung und unter Berücksichtigung von (6) gilt $h_{Q_i \setminus P_i} = \mathbf{0}$ für $i = 1, 2$. Folglich ist

$$
\begin{aligned}
& h_{Q_1} \otimes h_{Q_2} = \\
= \; & h_{Q_1 \cap Q_2} \\
= \; & h_{\left([(Q_1 \cap P_1) \cup (Q_1 \setminus P_1)] \cap [(Q_2 \cap P_2) \cup (Q_2 \setminus P_2)]\right)} \\
= \; & h_{\left([(Q_1 \cap P_1) \cap (Q_2 \cap P_2)] \cup [(Q_1 \cap P_1) \cap (Q_2 \setminus P_2)]\right)} \otimes^{\mathbf{d}} h_{\left([(Q_1 \setminus P_1) \cap (Q_2 \cap P_2)] \cup [(Q_1 \setminus P_1) \cap (Q_2 \setminus P_2)]\right)} \\
= \; & h_{[(Q_1 \cap P_1) \cap (Q_2 \cap P_2)]} \otimes^{\mathbf{d}} \mathbf{0} \otimes^{\mathbf{d}} \mathbf{0} \otimes^{\mathbf{d}} \mathbf{0} \\
= \; & h_{[(Q_1 \cap Q_2) \cap (P_1 \cap P_2)]} \\
\leq \; & h_{P_1 \cap P_2},
\end{aligned}
$$

wobei man (5) benutzt. □

2.4 Eine Maßalgebra

Ziel dieses Abschnitts ist der Nachweis einer Maßalgebrastruktur[8] auf $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$. Zu diesem Zweck müssen eine Addition, eine Multiplikation und ein positives Maß auf $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ eingeführt werden.

Für $h_{Q_1}, h_{Q_2} \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ sei deren Summe definiert als

$$h_{Q_1} \boxplus h_{Q_2} := h_{Q_1 \triangle Q_2}.$$

Gemäß Lemma 2.10 ist eine Multiplikation auf $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ bereits erklärt durch

$$h_{Q_1} \otimes h_{Q_2} = h_{Q_1 \cap Q_2}.$$

Die bereits in (2.7) erklärte, zu $\otimes$ duale Operation $\otimes^{\mathbf{d}}$ genügt damit der Gleichung

$$h_{Q_1} \otimes^{\mathbf{d}} h_{Q_2} = (h_{Q_1} \boxplus h_{Q_2}) \boxplus (h_{Q_1} \otimes h_{Q_2}).$$

Man beachte, daß auch die duale Operation $\otimes^{\mathbf{d}}$ assoziativ ist. Ferner gilt mit $h_{Q_n} \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch

$$\bigotimes_{n \in \mathbb{N}}^{\mathbf{d}} h_{Q_n} = h_{\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} Q_n} \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}.$$

[8]Zur Definition des Begriffes der Maßalgebra sei auf Halmos[21], §40, verwiesen.

Eine Funktion m auf $\mathcal{H}_\mathcal{Q}$ wird nun definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} m : \mathcal{H}_\mathcal{Q} &\longrightarrow \quad \mathbb{R}_0^+ \\ h_Q &\longmapsto m(h_Q) := h_Q(e). \end{aligned}$$

Proposition 2.11 *Das Quadrupel* $(\mathcal{H}_\mathcal{Q}, \boxplus, \otimes, m)$ *ist eine Maßalgebra.*

Beweis: Es muß nachgewiesen werden, daß
(1) $\mathcal{H}_\mathcal{Q}$ ein Boolscher σ-Ring ist, in welchem
(2) ein von $\mathbf{0} = h_\emptyset$ verschiedenes Element $\mathbf{1}^*$ existiert, so daß $\mathbf{1}^* \otimes h_Q = h_Q$ ist für alle $h_Q \in \mathcal{H}_\mathcal{Q}$, und daß
(3) m ein positives Maß auf $\mathcal{H}_\mathcal{Q}$ ist.

Dazu seien im folgenden $Q, Q_i \in \mathcal{Q}$, $i \in \mathbb{N}$.
ad (1) Abgeschlossenheit, Assoziativität und Kommutativität bezüglich Addition bzw. Multiplikation folgen jeweils aus den entsprechenden Eigenschaften der symmetrischen Differenz- bzw. Schnittbildung auf $\mathcal{Q}$. Das neutrale Element der Addition ist $\mathbf{0} = h_\emptyset$, denn es gilt $\emptyset \bigtriangleup Q = Q$. Das Distributivgesetz ergibt sich unmittelbar aus der Gleichheit $Q_1 \cap (Q_2 \bigtriangleup Q_3) = Q_1 \cap Q_2 \bigtriangleup Q_1 \cap Q_3$. Die Tatsache, daß $h_Q \in \mathcal{H}_\mathcal{Q}$ bezüglich $\boxplus$ zu sich selbst invers ist, folgt aus der Identität $Q \bigtriangleup Q = \emptyset$, wobei $Q \in \mathcal{Q}$ ist. Die Idempotenz der Elemente in $\mathcal{H}_\mathcal{Q}$ schließlich folgt aus der Gleichheit $Q \cap Q = Q$ für alle $Q \in \mathcal{Q}$.
Soweit ist $\mathcal{H}_\mathcal{Q}$ ein Boolscher σ-Ring.
ad (2) Man setze $\mathbf{1}^* := \mathbf{1} = h_G$.
ad (3)

- Zunächst ist $m(\mathbf{0}) = m(h_\emptyset) = h_\emptyset(e) = E_{\mu^\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_\emptyset\big(\mathbf{X}^n(e)\big) = 0$.

- Gemäß Proposition 2.8 gilt für jede Funktion $h_Q \in \mathcal{H}_\mathcal{Q}$ mit $h_Q \neq \mathbf{0}$ die Ungleichung $m(h_Q) = h_Q(e) > 0$.

- Zum Nachweis der σ-Additivität von m sei $\{h_{Q_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}_\mathcal{Q}$, für welche $h_{Q_i} \otimes h_{Q_j} = h_{Q_i \cap Q_j} = \mathbf{0}$ ist für alle $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $P_i := Q_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} Q_j)$. Dann sind die P_i, $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Außerdem gilt, wie man leicht verifiziert, $h_{P_i}(e) = h_{Q_i}(e)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Daraus folgt
$$m(\bigotimes_{i\in\mathbb{N}}^{\mathbf{d}} h_{Q_i}) = m(h_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} P_i}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} h_{P_i}(e) = \sum_{i\in\mathbb{N}} m(h_{Q_i}). \qquad \square$$

2.5 Ein Raum von Ultrafiltern

Nachstehend wird ein Raum konstruiert, welcher im weiteren Verlauf der Arbeit als der Poissonrand der Halbgruppe identifiziert werden wird. In einem ersten Schritt wird zu diesem Zweck nachgewiesen, daß die Maßalgebra dieses Raumes isomorph ist zu $(\mathcal{H}_Q, \boxplus, \otimes, m)$.

Von grundlegender Bedeutung für die Konstruktion des Poissonrandes sind die beiden folgenden Definitionen:

Definition 2.1 *Ein nichtleeres System $\mathfrak{M}$ von Elementen aus $\mathcal{H}_Q$ heißt ein $\mathcal{H}_Q$-* Filter*, falls folgendes gilt:*
F(1) $\mathbf{0} \notin \mathfrak{M}$.
F(2) *Aus $h_{Q_1} \in \mathfrak{M}$, $h_{Q_2} \in \mathcal{H}_Q$ und $h_{Q_1} \leq h_{Q_2}$ folgt $h_{Q_2} \in \mathfrak{M}$.*
F(3) *Für $h_{Q_1}, h_{Q_2} \in \mathfrak{M}$ ist $h_{Q_1} \otimes h_{Q_2} = h_{Q_1 \cap Q_2} \in \mathfrak{M}$.*

Definition 2.2 *Ein $\mathcal{H}_Q$-Filter $\mathfrak{M}$ heißt ein $\mathcal{H}_Q$-*Ultrafilter*, falls $\mathfrak{M}$ in keinem anderen $\mathcal{H}_Q$-Filter als echte Teilmenge enthalten ist.*

Wesentlich für das weitere Vorgehen sind die anschließenden Resultate [9]:

Proposition 2.12 *Zu jedem $\mathcal{H}_Q$-Filter $\mathfrak{M}$ gibt es einen $\mathcal{H}_Q$-Ultrafilter $\mathfrak{M}^\star$, so daß $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^\star$ gilt.*

Proposition 2.13 *Für einen $\mathcal{H}_Q$-Filter $\mathfrak{M}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
(a) *$\mathfrak{M}$ ist $\mathcal{H}_Q$-Ultrafilter.*
(b) *Es seien $h_{Q_1}, h_{Q_2} \in \mathcal{H}_Q$. Ist $h_{Q_1} \otimes^{\mathbf{d}} h_{Q_2} \in \mathfrak{M}$, so ist $h_{Q_1} \in \mathfrak{M}$ oder $h_{Q_2} \in \mathfrak{M}$.*
(c) *Für jede Funktion $h_Q \in \mathcal{H}_Q$ gilt $h_Q \in \mathfrak{M}$ oder $h_{Q^C} = \mathbf{1} - h_Q \in \mathfrak{M}$.*

$\mathfrak{M}$ sei ein $\mathcal{H}_Q$-Ultrafilter. Unter Berücksichtigung von **F(2)** in Definition 2.1 und Lemma 2.10(5) lassen sich dann folgende Aussagen ableiten:

$$h_{Q_1} \in \mathfrak{M}, h_{Q_2} \in \mathcal{H}_Q \Longrightarrow h_{Q_1} \otimes^{\mathbf{d}} h_{Q_2} \in \mathfrak{M},$$
$$h_{Q_1}, h_{Q_2} \in \mathcal{H}_Q \text{ und } h_{Q_1} \otimes h_{Q_2} \in \mathfrak{M} \Longrightarrow h_{Q_1}, h_{Q_2} \in \mathfrak{M}.$$

[9] Für den Beweis vergleiche man Satz 21.13 und Satz 21.14 in Rinow[36].

Nun sei

$$\Omega := \{\mathfrak{M} \,|\, \mathfrak{M} \text{ ist } \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}\text{-Ultrafilter}\}.$$

Für alle $h \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ sei

$$F_h := \{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, h \in \mathfrak{M}\}.$$

Ferner sei

$$F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}} := \{F_h \,|\, h \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}\}.$$

Leicht sieht man ein, daß $F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}$ folgende Eigenschaften besitzt. Hierbei seien $F_{h_i}, F_h \in F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}$ für $i = 1, 2$:

$$F_{h_1} \cap F_{h_2} = F_{h_1 \otimes h_2} \in F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}, \tag{2.8}$$

$$F_{h_1} \cup F_{h_2} = F_{h_1 \otimes^{\mathbf{d}} h_2} \in F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}, \tag{2.9}$$

$$(F_h)^C = F_{\mathbf{1}-h} \in F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}, \tag{2.10}$$

$$F_{\mathbf{0}} = F_{h_\emptyset} = \emptyset \in F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}. \tag{2.11}$$

Es läßt sich nicht nachweisen, daß die Vereinigung abzählbar vieler Mengen F_{h_i}, $i \in \mathbb{N}$, wieder ein Element in $F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}$ ist. Doch mit (2.8) bis (2.11) ist $F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}$ eine Algebra (und damit insbesondere ein Ring).

Im Anschluß wird ein Prämaß auf $F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}$ definiert. Doch vorab werde folgende Proposition bewiesen:

Proposition 2.14 *Es sind Q_1 und Q_2 in $\mathcal{Q}$ disjunkt genau dann, wenn $F_{h_{Q_1}}$ und $F_{h_{Q_2}}$ in $F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}$ disjunkt sind.*

Beweis: Ist $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, so gilt $F_{h_{Q_1}} \cap F_{h_{Q_2}} = F_{h_{Q_1 \cap Q_2}} = \emptyset$ wegen $\mathbf{F(1)}$ in Definition 2.1. Umgekehrt sei $\emptyset = F_{h_{Q_1}} \cap F_{h_{Q_2}} = \{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, h_{Q_1 \cap Q_2} \in \mathfrak{M}\}$. Da für jedes $\emptyset \neq Q \in \mathcal{Q}$ die Menge F_{h_Q} wenigstens einen den Filter $\{h \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}} \,|\, h_Q \leq h \leq \mathbf{1}\}$ umfassenden Ultrafilter beinhaltet, muß $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ sein. □

Lemma 2.15 *Eine Mengenfunktion $\tilde{\nu}$ auf $F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}$ sei erklärt wie folgt:*

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} : F_{\mathcal{H}_Q} &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ F_h &\longmapsto h(e). \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{\nu}$ ein Prämaß auf $F_{\mathcal{H}_Q}$ und es gilt $\tilde{\nu}(\Omega) = 1$.

Beweis:

- $\tilde{\nu}(\emptyset) = \tilde{\nu}(F_{h_\emptyset}) = h_\emptyset(e) = 0$.
- $\tilde{\nu}(F_h) = h(e) \geq 0$ für alle $h \in \mathcal{H}_Q$.
- $\tilde{\nu}(\Omega) = \tilde{\nu}(F_{h_G}) = h_G(e) = 1$.
- Es sei $\{F_{h_{Q_n}}\}_{n=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$, eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $F_{\mathcal{H}_Q}$. Gemäß Proposition 2.14, Lemma 2.10(3) und (2.9) gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(\bigcup_{n=1}^m F_{h_{Q_n}}) &= h_{\bigcup\limits_{n=1}^m Q_n}(e) \\ &= \sum_{n=1}^m h_{Q_n}(e). \end{aligned}$$

  Soweit ist $\tilde{\nu}$ ein Inhalt auf $F_{\mathcal{H}_Q}$. Um die σ-Additivität von $\tilde{\nu}$ nachzuweisen, betrachte eine Folge $\{F_{h_{Q_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $F_{\mathcal{H}_Q}$ mit $F_{h_{Q_n}} \supset F_{h_{Q_{n+1}}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{Q_n}} = \emptyset$. Es muß gezeigt werden, daß $\lim_{n\to\infty} \tilde{\nu}(F_{h_{Q_n}}) = \lim_{n\to\infty} h_{Q_n}(e) = 0$ ist: Zu diesem Zweck werde zunächst ein Hilfssatz bewiesen:

  Hilfssatz 2.16 *Es seien $F_{h_Q}, F_{h_P} \in F_{\mathcal{H}_Q}$. Es gilt $F_{h_Q} \supset F_{h_P}$ genau dann, wenn $h_Q \geq h_P$ ist.*

  Beweis: Es ist offensichtlich, daß die Ungleichung hinreichend für die Mengeninklusion ist. Für den Beweis der Gegenrichtung reicht es gemäß Lemma 2.10(6) aus, die Identität $h_{P\setminus Q} = \mathbf{0}$ nachzuweisen. Angenommen, es sei $h_{P\setminus Q} \neq \mathbf{0}$ und $\mathcal{Z} := \{h \in \mathcal{H}_Q \,|\, h_{P\setminus Q} \leq h\}$. Dann gilt

  - $\mathbf{0} \notin \mathcal{Z}$ aufgrund der Annahme,

- Für $h_{P_l} \in \mathcal{Z}$, $l = 1, 2$, gilt $h_{P_1} \otimes h_{P_2} \geq h_{P \setminus Q} \otimes h_{P \setminus Q} = h_{P \setminus Q}$ nach Lemma 2.10(7). Also gilt auch $h_{P_1} \otimes h_{P_2} \in \mathcal{Z}$,
- Mit $h_R \in \mathcal{H}_Q$, $h \in \mathcal{Z}$ und $h_R \geq h$ gilt auch $h_R \in \mathcal{Z}$.

Damit ist $\mathcal{Z}$ ein $\mathcal{H}_Q$-Filter. Es bezeichne $\mathcal{Z}^\star$ den $\mathcal{Z}$ umfassenden $\mathcal{H}_Q$-Ultrafilter. Dann gilt $h_P \in \mathcal{Z}^\star$, aber nicht $h_Q \in \mathcal{Z}^\star$: Wäre nämlich $h_Q \geq h_{P \setminus Q}$, so folgte $h_{P \setminus Q} = h_{P \setminus Q} \otimes h_{P \setminus Q} \leq h_Q \otimes h_{P \setminus Q} = h_\emptyset = \mathbf{0}$, was der Annahme widerspricht. Damit ist die Existenz eines $\mathcal{H}_Q$-Ultrafilters nachgewiesen, welcher h_P, aber nicht h_Q enthält. Das widerspricht der Voraussetzung. Also ist $h_{P \setminus Q} = \mathbf{0}$. $\diamond$

Nach Voraussetzung ist $\{h_{Q_n}(e)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine abfallende Folge. Angenommen, es gäbe ein $\varepsilon > 0$, so daß $h_{Q_n}(e) \geq \varepsilon > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Man betrachte die Menge $\mathcal{Y} := \{h \in \mathcal{H}_Q \mid \text{es existiert ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so daß } h \geq h_{Q_n}\}$. Dann gilt insbesondere $\{h_{Q_n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{Y}$. Unter Berücksichtigung von Proposition 2.8, Lemma 2.10(6) und (7) und Hilfssatz 2.16 sieht man schnell ein, daß $\mathcal{Y}$ ein $\mathcal{H}_Q$-Filter ist. Also existiert ein $\mathcal{H}_Q$-Ultrafilter $\mathcal{Y}^\star$, welcher insbesondere $\{h_{Q_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ enthält. Das aber steht im Widerspruch zu $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{h_{Q_n}} = \emptyset$. Also kann die Folge $\{h_{Q_n}(e)\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig von 0 weg beschränkt sein. Folglich ist $\lim_{n \to \infty} h_{Q_n}(e) = 0$. $\square$

Nun sei $\mathcal{F}_0 := \sigma(F_{\mathcal{H}_Q})$ die von $F_{\mathcal{H}_Q}$ erzeugte σ-Algebra in Ω und ν_0 die Fortsetzung von $\tilde{\nu}$ auf $\mathcal{F}_0$. Das Maß ν_0 ist eindeutig bestimmt, da $F_{\mathcal{H}_Q}$ durchschnittsstabil ist und $F_{h_G} = \Omega$ ist[10]. Wie bereits angedeutet, liegt für eine Folge $\{F_{h_{Q_n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{h_{Q_n}}$ nicht notwendig in $F_{\mathcal{H}_Q}$, d.h. es kann $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{h_{Q_n}} \subsetneqq F_{h_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n}}$ sein. Aber die symmetrische Differenz der beiden Mengen hat Maß Null, wie man wie folgt sieht:

$$\begin{aligned}
\nu_0\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{h_{Q_n}} \triangle F_{h_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n}}\Big) &= \nu_0\Big(\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{h_{Q_n}} \setminus F_{h_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n}}\big) \cup \big(F_{h_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n}} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{h_{Q_n}}\big)\Big) \\
&= \nu_0\big(F_{h_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n}} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{h_{Q_n}}\big) \\
&= \nu_0\big(F_{h_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n}}\big) - \nu_0\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{h_{Q_n}}\big)
\end{aligned}$$

[10] Vgl. Satz 5.4 in Bauer[3].

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{\nu}\big(F_{h_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n}}\big) - \nu_0\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{Q_n}}\big) \\
&= h_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n}(e) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_0(F_{h_{Q_n}}) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} h_{Q_n}(e) - \sum_{n\in\mathbb{N}} h_{Q_n}(e) = 0.
\end{aligned}
$$

Es bezeichne $(\Omega, \mathcal{F}_v, \nu_v)$ die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{F}_0, \nu_0)$ und

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{F}_v \mid \text{ es existiert ein } F_{h_A} \in F_{\mathcal{H}_Q}, \text{ s.d. } \nu_v(A \bigtriangleup F_{h_A}) = 0\}.$$

Proposition 2.17 *Das Mengensystem $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra in Ω.*

Beweis: Man sieht sofort, daß $\emptyset \in \mathcal{F}$ ist und mit $A \in \mathcal{F}$ auch $A^C \in \mathcal{F}$ gilt. Sei jetzt $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathcal{F}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert nach Voraussetzung ein $F_{h_{A_n}} \in F_{\mathcal{H}_Q}$, so daß $\nu_v(A_n \bigtriangleup F_{h_{A_n}}) = 0$ ist. Es gilt[11]

$$\nu_v\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \bigtriangleup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{A_n}}\Big) \le \nu_v\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \bigtriangleup F_{h_{A_n}})\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_v(A_n \bigtriangleup F_{h_{A_n}}) = 0.$$

Nun liegt die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{A_n}}$ nicht notwendig in $F_{\mathcal{H}_Q}$, aber es gilt $F_{h_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}} \in F_{\mathcal{H}_Q}$ und $\nu_v(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{A_n}} \bigtriangleup F_{h_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}}) = 0$. Das liefert die Behauptung:

$$\nu_v\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \bigtriangleup F_{h_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}}\Big) = 0. \tag{2.12}$$

□

Offensichtlich gilt $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_v$. Eine Mengenfunktion ν auf $\mathcal{F}$ wird nun erklärt wie folgt: Sei $A \in \mathcal{F}_v$ und $F_{h_A} \in \mathcal{H}_Q$ habe die Eigenschaft $\nu_v(A \bigtriangleup F_{h_A}) = 0$. Dann definiert man $\nu(A) := \nu_v(F_{h_A}) = \tilde{\nu}(F_{h_A})$.

Proposition 2.18 *Durch ν ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$ gegeben.*

Beweis: Positivität und Normiertheit ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften von ν_v. Nun sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in $\mathcal{F}$. Aus (2.12) folgt $\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \nu_v(F_{h_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}})$. Da $\nu_v(F_{h_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}}) = \nu_v(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{A_n}})$ und nach Proposition 2.14 mit den A_n auch die Mengen $F_{h_{A_n}}$ disjunkt sind, folgt die Behauptung nun direkt aus der σ-Additivität von ν_v. □

[11] Vgl. Aufg. 2(f) auf S.6 in Bauer[3].

Bemerkung 2.5 *Das Wahrscheinlichkeitsmaß ν ist eindeutig bestimmt nach Konstruktion.*

Zwei Elemente $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, für die $\nu(A_1 \vartriangle A_2) = 0$ gilt, sind gleich modulo ν und man schreibe in diesem Fall $A_1 = A_2\,[\nu]$. Damit gilt also beispielsweise, wie oben gezeigt wurde, für eine Folge $\{F_{h_{Q_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen in $F_{\mathcal{H}_\mathcal{Q}}$ die Gleichheit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{Q_n}} = F_{h_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n}}\,[\nu]$. Nach Definition von $\mathcal{F}$ läßt sich die Maßalgebra[12] $\mathcal{F}[\nu]$ darstellen wie folgt:

$$\mathcal{F}[\nu] := \{A \in \mathcal{F} \mid \text{es existiert ein } h \in \mathcal{H}_\mathcal{Q}, \text{ s. d. } A = F_h\,[\nu]\}.$$

Lemma 2.19 *Die Maßalgebren $(\mathcal{H}_\mathcal{Q}, \boxplus, \otimes, m)$ und $(\mathcal{F}[\nu], \vartriangle, \cap, \nu)$ sind isomorph.*

Beweis: Es sei

$$\begin{array}{rcl} \Xi : \mathcal{F}[\nu] & \longrightarrow & \mathcal{H}_\mathcal{Q} \\ F_h & \longmapsto & h. \end{array}$$

Die Bijektivität von Ξ ergibt sich unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{F}[\nu]$.
Wegen $\nu(F_h) = h(e) = m(h) = m\big(\Xi(F_h)\big)$ ist Ξ maßerhaltend[13].
Weiterhin gilt mit Lemma 2.10(2) und (2.10)

$$\begin{aligned} \Xi\big(F_{h_{Q_1}} \setminus F_{h_{Q_2}}\big) &= \Xi\big(F_{h_{Q_1}} \cap F_{h_{{Q_2}^C}}\big) \\ &= h_{Q_1 \cap Q_2^C} \\ &= \Xi\big(F_{h_{Q_1}}\big) \otimes \Xi\big((F_{h_{Q_2}})^C\big). \end{aligned}$$

Und schließlich ist für jede Folge $\{F_{h_{Q_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen in $\mathcal{F}[\nu]$ mit

$$G_{h_{Q_n}} := F_{h_{Q_n}} \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} F_{h_{Q_i}}\Big) = F_{h_{\left(Q_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i\right)}}$$

folgende Gleichungskette richtig:

[12] Vgl. Halmos[21], §40; genaugenommen wird das Quadrupel $(\mathcal{F}[\nu], \vartriangle, \cap, \nu)$ als *Maßalgebra* bezeichnet.

[13] Das Maß ν ist eine Fortsetzung von $\tilde{\nu}$ und damit gilt $\nu(F_h) = \tilde{\nu}(F_h) = h(e)$ für alle $h \in \mathcal{H}_\mathcal{Q}$.

$$\begin{aligned}\Xi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{h_{Q_n}}\Big) &= \Xi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{h_{Q_n}}\Big) = \Xi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{h_{\left(Q_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i\right)}}\Big) \\ &= \Xi\big(F_{h_{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(Q_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i\right)}}\big) = h_{\bigcup_{n=1}^{\infty}(Q_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i)} \\ &= h_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n} = \bigotimes_{n=1}^{\infty\ \mathbf{d}} h_{Q_n} = \bigotimes_{n=1}^{\infty\ \mathbf{d}} \Xi(F_{h_{Q_n}}).\end{aligned}$$

Gemäß HALMOS[21], S.167, ist die Behauptung hiermit bewiesen. □

2.6 Konstruktion eines Randes

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß der in Abschnitt 2.5 definierte Raum (Ω, ν) ein Rand von G ist. Dazu sind Bedingungen an den Prozeß $\{\mathbf{X}^n(e)\}_{n\in\mathbb{N}}$ notwendig, die über die bereits auf Seite 21 geforderte Eigenschaft hinausgehen:
2. Im folgenden sei[14]

$$\mu^{\mathbb{N}}(X_1(e) \neq e) = 1. \tag{2.13}$$

3. Außerdem gelte im folgenden für alle $g \in G$

$$\mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(g) = g \text{ unendlich oft}\big) = 0. \tag{2.14}$$

Schließlich werde eine Bedingung an die Abbildung $g : G \longrightarrow G$ formuliert:
4. Die Abbildung

$$\begin{aligned} g : G &\longrightarrow G \\ g' &\longmapsto gg' \end{aligned}$$

sei injektiv für alle $g \in G$.

[14] Von Bedeutung ist an dieser Stelle nicht, daß man im *ersten* Schritt die Einheit verläßt. Vielmehr geht es um die Tatsache, daß man die Einheit fast sicher überhaupt verläßt. Die etwas weniger streng formulierte Bedingung $\mu^{\mathbb{N}}(\mathbf{X}^n(e) \neq e$ für irgendein $n \in \mathbb{N}) = 1$ würde nachfolgende Beweise aber ungleich komlizierter aussehen lassen, so daß einer zügigen Beweisführung zuliebe der restriktiver formulierten Bedingung (2.13) der Vorzug gegeben wurde.

Zunächst soll nachgewiesen werden, daß Ω ein G-Raum ist. Dazu ist eine Reihe von Vorbemerkungen nötig.

Proposition 2.20 *Sei $g \in G$, $Q \in \mathcal{Q}$ und*

$$g\,Q := \{gq \,|\, q \in Q\},$$
$$g^{-1}Q := \{\gamma \in G \,|\, g\gamma \in Q\}.$$

Dann gilt $g\,Q, g^{-1}Q \in \mathcal{Q}$.

Bemerkung 2.6 *Man beachte, daß $g^{-1}Q$ leer sein kann, auch wenn $Q \neq \emptyset$ gilt. Allgemein gilt $gg^{-1}Q \subset Q$.*

Beweis: Zunächst werde bewiesen, daß der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{g^{-1}Q}\big(\mathbf{X}^n(g')\big)$ $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. existiert für alle $g' \in G$. Aus den speziellen Eigenschaften von $\mathcal{E}(G)$ folgt für alle $e \neq g' \in G$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{g^{-1}Q}\big(\mathbf{X}^n(g')\big) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(g\mathbf{X}^n(g')\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(\mathbf{X}^n(gg')\big) = h_Q(gg'). \end{aligned}$$

Für $g' = e$ und $\mu^{\mathbb{N}}$-fast alle $\eta \in \mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}$ gilt mit $X_1(\eta)(e) =: g_{e\eta} \neq e$ $\big($vgl. (2.13)$\big)$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{g^{-1}Q}\big(\mathbf{X}^n(\eta)(e)\big) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(g\mathbf{X}^n(\eta)(e)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\Big(gX_n \circ \ldots \circ X_2(\eta)\big(X_1(\eta)(e)\big)\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(gX_n \circ \ldots \circ X_2(\eta)(g_{e\eta})\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(X_n \circ \ldots \circ X_2(\eta)(gg_{e\eta})\big). \end{aligned}$$

Da $X_n \circ \ldots \circ X_2$ und $X_{n-1} \circ \ldots \circ X_1$ dieselbe Verteilung besitzen (siehe Hilfssatz 2.2), existiert der Grenzwert $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. nach Voraussetzung.

Nun werde die $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(g')\big)$ für alle $g' \in G$ verifiziert. Dazu muß eine Fallunterscheidung unternommen werden:

A. Es sei $g' = g\tilde{g}$ für ein geeignetes Halbgruppenelement $\tilde{g} \neq e$. Sei $\eta \in \mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}$, so daß $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(\mathbf{X}^n(\eta)(\tilde{g})\big) = 1$ ist. Dann existiert ein $n^* = n^*(\eta) \in \mathbb{N}$, so daß $\mathbf{X}^n(\eta)(\tilde{g}) \in Q$ ist für alle $n \geq n^*$. Das impliziert $g\mathbf{X}^n(\eta)(\tilde{g}) = \mathbf{X}^n(\eta)(g\tilde{g}) \in gQ$

für alle $n \geq n^*$, also erhält man $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(\eta)(g\tilde{g})\big) = 1$.
Nun sei $\eta \in \mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}$ so gewählt, daß $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{Q}\big(\mathbf{X}^n(\eta)(\tilde{g})\big) = 0$ ist. Dann existiert ein $n^0 = n^0(\eta) \in \mathbb{N}$, so daß $\mathbf{X}^n(\eta)(\tilde{g}) \in Q^C$ für alle $n \geq n^0$. Also ist $g\mathbf{X}^n(\eta)(\tilde{g}) = \mathbf{X}^n(\eta)(g\tilde{g}) \in gQ^C \subset (gQ)^C$ für alle $n \geq n^0$ (an dieser Stelle berücksichtige man die Injektivität von g). Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(\eta)(g\tilde{g})\big) = 0$.

B. Nun sei $g' = g$.
B.1 Zunächst sei $\eta \in \mathcal{E}(G)^{\mathbb{N}}$ so gewählt, daß $\mathbf{X}^n(\eta)(g) \notin gQ$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann verschwindet auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(\eta)(g)\big)$.
B.2 Nun sei $\mathbf{X}^{n^*}(\eta)(g) \in gQ$ für ein $n^* \in \mathbb{N}$. Wegen der Injektivität von g existiert ein $\gamma = \gamma(\eta) \in Q$, so daß $\mathbf{X}^{n^*}(\eta)(g) = g\gamma$ ist.
B.2.1 Ist $\gamma \neq e$, so folgt für $n \geq n^*$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(\eta)(g)\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(X_n \circ \ldots \circ X_{n^*+1}(\eta)(g\gamma)\big)$$

und dieser Grenzwert existiert nach Teil **A.** dieses Beweises.
B.2.2 Nun sei $\gamma = e$, also $\mathbf{X}^{n^*}(\eta)(g) = g$. Jetzt argumentiert man genauso wie vorher in **B.1** oder **B.2.1**: Man ersetze lediglich die Folge $\mathbf{X}^n$ durch $X_n \circ \ldots \circ X_{n^*+1}$.
Gemäß Bedingung (2.14) tritt für fast alle Pfade der Fall **B.2.2** nur endlich oft ein. Mit anderen Worten, es existiert entweder ein $\tilde{n} = \tilde{n}(\eta) \in \mathbb{N}$, so daß $\mathbf{X}^n(\eta)(g) \notin gQ$ für alle $n \geq \tilde{n}$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{Q}\big(\mathbf{X}^n(\eta)(g)\big) = 0$ ist (Fall **B.1**), oder es existiert ein $e \neq \gamma \in Q$ und ein $n' \in \mathbb{N}$, so daß $\mathbf{X}^{n'}(\eta)(g) = g\gamma$ ist (Fall **B.2.1**). In beiden Fällen existiert der Grenzwert.

C. Nun muß die $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(g')\big)$ nur noch für diejenigen Halbgruppenelemente g' bewiesen werden, für die es *kein* $g'' \in G$ gibt, so daß $g' = gg''$ ist :
C.1 Im ersten Fall sei $\mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(\eta)(g')\big) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann verschwindet auch der Grenzwert.
C.2 Im anderen Fall existiert wieder ein $n^* = n^*(\eta) \in \mathbb{N}$ und ein $\gamma = \gamma(\eta) \in G$, so daß $\mathbf{X}^{n^*}(\eta)(g') = g\gamma \in gQ$ ist. Folglich erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(\eta)(g')\big) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\Big(X_n \circ \ldots \circ X_{n^*+1}(\eta)\big(\mathbf{X}^{n^*}(\eta)(g')\big)\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(X_n \circ \ldots \circ X_{n^*+1}(\eta)(g\gamma)\big),$$

und dieser Grenzwert existiert nach Teil **A.** und **B.** des Beweises. □

Nun definiere man für alle $g \in G$ und alle $h_Q \in \mathcal{H}_Q$

$$gh_Q := h_{gQ}. \tag{2.15}$$

Nach Proposition 2.20 ist also mit $h_Q \in \mathcal{H}_Q$ und $g \in G$ auch $gh_Q \in \mathcal{H}_Q$. Weiter ist $eh_Q = h_Q$ und $(g_1g_2)h_Q = h_{g_1g_2Q} = g_1h_{g_2Q} = g_1(g_2h_Q)$ für alle $h_Q \in \mathcal{H}_Q$ und alle $g_1, g_2 \in G$.
Man definiert für alle $g \in G$ und alle $\mathfrak{M} \in \Omega$

$$g\,\mathfrak{M} := \{h' \in \mathcal{H}_Q \mid \text{ es existiert ein } h \in \mathfrak{M}, \text{ so daß } gh \leq h'\}.$$

Proposition 2.21 *Für alle $g \in G$ und alle $\mathfrak{M} \in \Omega$ ist $g\,\mathfrak{M}$ ein $\mathcal{H}_Q$-Ultrafilter.*

Beweis: Sei $g \in G$ und $\mathfrak{M} \in \Omega$. Aus $h_Q \neq \mathbf{0}$ folgt $gh_Q \neq \mathbf{0}$ für alle $g \in G$ und $h_Q \in \mathcal{H}_Q$. Wäre nämlich $gh_Q = \mathbf{0}$, so bedeutete das $h_{gQ}(g') = 0$ für alle $g' \in G$, insbesondere also für alle g' von der Form $g' = gg''$, $g'' \in G \setminus \{e\}$. Das ist äquivalent mit der Aussage

$$\begin{aligned} 0 &= E_{\mu^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(g')\big) \\ &= E_{\mu^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(\mathbf{X}^n(gg'')\big) \\ &= E_{\mu^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{gQ}\big(g\mathbf{X}^n(g'')\big) \\ &= E_{\mu^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{Q}\big(\mathbf{X}^n(g'')\big) = h_Q(g''). \end{aligned}$$

Da h_Q μ-harmonisch ist, gilt $h_Q(e) = \int_{\mathcal{E}(G)} h_Q\big(\eta(e)\big)\,d\mu(\eta) = 0$ wegen Bedingung (2.13). Das aber widerspricht der Voraussetzung $h_Q \neq \mathbf{0}$. Also gilt $\mathbf{0} \notin g\,\mathfrak{M}$.
Nun seien $h_1, h_2 \in g\,\mathfrak{M}$. Nach Voraussetzung existieren $h_{Q_1}, h_{Q_2} \in \mathfrak{M}$, so daß $gh_{Q_1} \leq h_1$ und $gh_{Q_2} \leq h_2$ ist. Es ist zu zeigen, daß ein $h_P \in \mathfrak{M}$ existiert, so daß $gh_P \leq h_1 \otimes h_2$ ist. Doch unter Berücksichtigung der Injektivität von g ist $gh_{Q_1\cap Q_2} = h_{g(Q_1\cap Q_2)} = h_{gQ_1\cap gQ_2} = gh_{Q_1} \otimes gh_{Q_2} \leq h_1 \otimes h_2$ nach Lemma 2.10(7).
Damit kann man $h_P = h_{Q_1\cap Q_2}$ wählen.
Aus der Definition von $g\,\mathfrak{M}$ folgt, daß mit $h_1 \in g\,\mathfrak{M}$, $h_2 \in \mathcal{H}_Q$ und $h_2 \geq h_1$ auch $h_2 \in g\,\mathfrak{M}$ gilt.

Nun muß eingesehen werden, daß $g\,\mathfrak{M}$ in keinem anderen $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$-Filter echt enthalten sein kann. Dazu bediene man sich der Aussage (c) in Proposition 2.13 und der Inklusion $gg^{-1}Q \subset Q$, wobei $Q \in \mathcal{Q}$ sei, wie folgt: Es sei $h_Q \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$. Dann ist $g^{-1}Q \in \mathcal{Q}$ und - da $\mathfrak{M}$ ein $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$-Ultrafilter ist - gilt entweder $h_{g^{-1}Q} \in \mathfrak{M}$ oder $h_{(g^{-1}Q)^C} = h_{g^{-1}Q^C} \in \mathfrak{M}$. Im ersten Fall folgt $gh_{g^{-1}Q} = h_{gg^{-1}Q} \in g\,\mathfrak{M}$. Dies impliziert $h_Q \in g\,\mathfrak{M}$, da $h_Q \geq h_{gg^{-1}Q}$ ist. Im zweiten Fall folgt $gh_{g^{-1}Q^C} = h_{gg^{-1}Q^C} \in g\,\mathfrak{M}$. Aber daraus folgt $h_{Q^C} \in g\,\mathfrak{M}$, da $h_{gg^{-1}Q^C} \leq h_{Q^C}$ ist. Also ist für alle $h_Q \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ entweder $h_Q \in g\,\mathfrak{M}$ oder $h_{Q^C} \in g\,\mathfrak{M}$. Damit ist $g\,\mathfrak{M}$ ein $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$-Ultrafilter. □

Proposition 2.22 *Für alle $g \in G$, $\mathfrak{M} \in \Omega$ und $Q \in \mathcal{Q}$ gilt $g\,\mathfrak{M} \in F_{h_Q}$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \in F_{h_{g^{-1}Q}}$ ist.*

Beweis: Sei $\mathfrak{M} \in F_{h_{g^{-1}Q}}$, d.h. es ist $h_{g^{-1}Q} \in \mathfrak{M}$. Dann gilt $gh_{g^{-1}Q} = h_{gg^{-1}Q} \leq h_Q$. Folglich gilt $h_Q \in g\,\mathfrak{M}$.
Für den Beweis der Gegenrichtung sei angenommen, daß aus $h_Q \in g\,\mathfrak{M}$ nicht $h_{g^{-1}Q} \in \mathfrak{M}$ folgt. Dann wäre $h_{(g^{-1}Q)^C} = h_{g^{-1}Q^C} \in \mathfrak{M}$, da $\mathfrak{M}$ ein $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$-Ultrafilter ist. Daraus folgte dann $gh_{(g^{-1}Q)^C} = h_{gg^{-1}Q^C} \in g\,\mathfrak{M}$. Gemäß Lemma 2.10(7) implizierte dies schließlich $h_{gg^{-1}Q^C} \otimes h_Q = h_{gg^{-1}Q^C \cap Q} = h_\emptyset = \mathbf{0} \in g\,\mathfrak{M}$, was der Tatsache, daß $g\,\mathfrak{M}$ ein $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$-Ultrafilter ist, widerspricht. Demnach gilt $h_{g^{-1}Q} \in \mathfrak{M}$. □

Nach diesen Vorbereitungen erweist sich der Beweis der folgenden Behauptung als einfach.

Lemma 2.23 *Durch*

$$\begin{array}{rcl} G \times \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (g, \mathfrak{M}) & \longmapsto & g\,\mathfrak{M} \end{array}$$

wird eine Halbgruppenaktion von G auf Ω definiert.

Beweis: Wie oben gesehen, ist $(\Omega, \mathcal{F})$ ein meßbarer Raum, und für alle $g \in G$ und alle $\mathfrak{M} \in \Omega$ ist $g\,\mathfrak{M}$ ein $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$-Ultrafilter. Gemäß Proposition 2.22 ist für alle $g \in G$ und alle $Q \in \mathcal{Q}$ die Menge $\{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, g\,\mathfrak{M} \in F_{h_Q}\} = F_{h_{g^{-1}Q}}$ in $F_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}$ enthalten. Daraus folgt die $\mathcal{F}_0$-Meßbarkeit von $g : \Omega \longrightarrow \Omega$ für alle $g \in G$. Um die

$\mathcal{F}$-Meßbarkeit von g nachzuweisen, muß gezeigt werden, daß für alle $g \in G$ und alle $A \in \mathcal{F}$ aus $\nu(A) > 0$ die Ungleichung $\nu(gA) > 0$ folgt. Sei also F_{h_A} diejenige Menge in $F_{\mathcal{H}_Q}$, für die $\nu_v(A \vartriangle F_{h_A}) = 0$ gilt. Dann ist $\nu_v(gA \vartriangle F_{h_{gA}}) = 0$ und es folgt $\nu(gA) = \nu_v(F_{h_{gA}}) = h_{gA}(e) > 0$, da $h_A(e) > 0$ ist nach Voraussetzung. (Das letzte Argument wurde bereits im Beweis zu Proposition 2.21 verwendet.) Die Halbgruppenaktionseigenschaften **HGA(1)** und **HGA(2)** ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Aktion. $\square$

Soweit ist Ω ein G-Raum. Nun soll nachgewiesen werden, daß ν ein μ-stationäres Maß auf Ω ist. Dies läßt sich unter einer zusätzlichen Bedingung leicht zeigen:

5. Im folgenden gelte für alle $\eta \in \mathcal{E}(G)$

$$\eta(gg') = g\eta(g') \text{ für } \textit{alle } g, g' \in G. \tag{2.16}$$

Lemma 2.24 *Das Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf Ω ist μ-stationär.*

Es ist ausreichend, die Gleichheit $\nu_g = \mu_g \star \nu$ für alle Elemente F_{h_Q} des Erzeugers $F_{\mathcal{H}_Q}$ von $\mathcal{F}_0$ zu verifizieren, da ν nach Konstruktion durch die Definition auf $F_{\mathcal{H}_Q}$ bereits vollständig bestimmt ist. Sei also $g \in G$ und $h_Q \in \mathcal{H}_Q$. Dann folgt unter Berücksichtigung von Proposition 2.22 und Eigenschaft (2.16)

$$\begin{aligned}
\nu_g(F_{h_Q}) &= \nu\big(\{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, g\,\mathfrak{M} \in F_{h_Q}\}\big) \\
&= \nu\big(\{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, \mathfrak{M} \in F_{h_{g^{-1}Q}}\}\big) \\
&= \nu(F_{h_{g^{-1}Q}}) = h_{g^{-1}Q}(e) = h_Q(g) \\
&= \int_{\mathcal{E}(G)} h_Q\big(\eta(g)\big)\, d\mu(\eta) \\
&= \int_G h_Q(\tilde{g})\, d\mu_g(\tilde{g}) \\
&= \int_G h_{\tilde{g}^{-1}Q}(e)\, d\mu_g(\tilde{g}) \\
&= \int_G \nu(F_{h_{\tilde{g}^{-1}Q}})\, d\mu_g(\tilde{g}) \\
&= \int_G \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_{\tilde{g}^{-1}Q}}}(\mathfrak{M})\, d\nu(\mathfrak{M}) d\mu_g(\tilde{g}) \\
&= \int_G \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_Q}}(\tilde{g}\,\mathfrak{M})\, d\nu(\mathfrak{M}) d\mu_g(\tilde{g})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_Q}}(\mathfrak{M})\, d(\mu_g \star \nu)(\mathfrak{M}) \\ &= (\mu_g \star \nu)(F_{h_Q}). \end{aligned} \qquad \square$$

Damit ist für jede Funktion $\phi \in L^\infty(\Omega, \nu)$ die Funktion h_ϕ, definiert durch $h_\phi(g) = \int_\Omega \phi(g\,\mathfrak{M})\, d\nu(\mathfrak{M})$, beschränkt und μ-harmonisch. Für den Nachweis, daß (Ω, ν) ein Rand von G ist, steht nun gemäß Definition 1.6 lediglich der Nachweis der Existenz eines Isomorphismus J_Ω von $L^\infty(\Omega, \nu)$ nach $\mathcal{H}_\Omega$ noch aus. Um dies zu zeigen, ist eine zusätzliche Voraussetzung an die Form der Mengen $Q \in \mathcal{Q}$ nötig.

Im folgenden werde angenommen, daß folgende Bedingung erfüllt ist:
6. Für jede Menge $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{\emptyset\}$ existiert ein $g \in G$, so daß $Q \supset g\,G$ ist.

Proposition 2.25 *Sei $\phi \in L^\infty(\Omega, \nu)$ und $h_\phi(g) = \int_\Omega \phi(gt)\, d\nu(t) = 0$ für alle $g \in G$. Dann ist $\phi = 0$ ν-f.s.*

Beweis: Für den Beweis werden zwei Hilfssätze formuliert:

Hilfssatz 2.26 *Für alle $Q \in \mathcal{Q}$ existiert ein $g \in G$, so daß $F_{h_Q} \supset g\,\Omega$ ist.*

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein $g \in G$, so daß $Q \supset g\,G$ ist. Sei $\mathfrak{M}' \in \Omega$ und $\mathfrak{M} := \{h \in \mathcal{H}_Q \mid \text{es existiert ein } h_P \in \mathfrak{M}', \text{ so daß } h_{gP} \leq h\} \in g\,\Omega$. Dann folgt $h_Q \in \mathfrak{M}$, da $h_Q \geq h_{gG}$ ist. Also gilt $\mathfrak{M} \in F_{h_Q}$. Da $h_G \in \mathfrak{M}'$ für alle $\mathfrak{M}' \in \Omega$ ist, gilt $g\,\Omega \subset F_{h_Q}$. $\diamond$

Hilfssatz 2.27 *Sei $\emptyset \neq F_{h_Q} \in F_{\mathcal{H}_Q}$. Dann kann weder $\phi(t) > 0$ für alle $t \in F_{h_Q}$ noch $\phi(t) < 0$ für alle $t \in F_{h_Q}$ gelten.*

Beweis: Angenommen, es sei $\phi(t) > 0$ auf F_{h_Q}. Nach Hilfssatz 2.26 existiert ein $g \in G$, so daß $F_{h_Q} \supset g\Omega$ ist. Daraus folgt[15] $h(g) = \int_\Omega \phi(gt)\, d\nu(t) = \int_{g\,\Omega} \phi(t)\, d\nu(t) > 0$, was der Voraussetzung, daß h auf G verschwindet, widerspricht. Der Beweis für die andere Ungleichung verläuft analog. $\diamond$.

Hilfssatz 2.27 impliziert, daß ϕ auf *keiner* meßbaren Teilmenge $A \in \mathcal{F}$,

[15] Man beachte, daß $g\,\Omega$ für alle $g \in G$ keine ν-Nullmenge ist wegen Proposition 1.3 und $\nu(\Omega) = 1$.

welche positives Maß hat, strikt positiv oder strikt negativ sein kann. Denn nach Definition von $\mathcal{F}$ existiert zu jeder meßbaren Menge $A \in \mathcal{F}$ ein Menge $F_{h_A} \in F_{\mathcal{H}_Q}$, so daß $\nu_v(A \vartriangle F_{h_A}) = 0$ ist. Mit A hat auch F_{h_A} positives Maß und daher kann ϕ auf F_{h_A}, wie gerade gezeigt, nicht strikt positiv oder negativ sein. Also kann ϕ höchstens auf $A \setminus F_{h_A}$ strikt positiv oder negativ sein, doch diese Menge hat Maß Null. □

2.7 Herleitung einer Integraldarstellung harmonischer Funktionen

Ziel dieses Abschnittes ist der Nachweis der Behauptung, daß die Abbildung $J_\Omega : L^\infty(\Omega, \nu) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein Isomorphismus ist, d.h. insbesondere, daß es zu jeder harmonischen Funktion h auf G eine Funktion $\phi_h \in L^\infty(\Omega, \nu)$ gibt mit der Eigenschaft, daß sich h darstellen läßt wie folgt:

$$h(g) = \int_\Omega \phi_h(g\,\mathfrak{M})\, d\nu(\mathfrak{M}),\ g \in G.$$

Die Elemente in Ω werden von nun an der Übersichtlichkeit halber nicht länger mit $\mathfrak{M}$, sondern mit ω bezeichnet. Aus den vorangegangenen Abschnitten ist bekannt, daß für alle $h_Q \in \mathcal{H}_Q$ gilt $h_Q(e) = \nu(F_{h_Q}) = \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_Q}}(e\omega)\, d\nu(\omega)$. Eine Erweiterung dieser Darstellung muß nun in zweierlei Hinsicht erfolgen. Zum einen muß die Darstellung auf beliebige harmonische Funktionen erweitert werden. Zum anderen möchte man eine Integraldarstellung der harmonischen Funktionen auf ganz G erhalten, d.h. die Darstellung sollte auch für Argumente $e \neq g \in G$ gültig sein. Für den ersten Schritt geht man kanonisch vor[16]. Für den zweiten Schritt wird man auf Resultate aus dem vorangegangenen Abschnitt zurückgreifen.

Für alle $h_Q \in \mathcal{H}_Q$ gilt

$$m(h_Q) = h_Q(e) = \nu(F_{h_Q}),$$

[16] Man vergleiche zum Beispiel die Herleitung des Integrals nach Bauer[3], Kapitel II.

wobei $F_{h_Q} \in \mathcal{F}$ gilt. Daher kann man - der allgemeinen Integraldefinition (vgl. BAUER[3], Kapitel 2) entsprechend - schreiben

$$h_Q(e) = \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_Q}}(e\omega)\, d\nu(\omega), \tag{2.17}$$

wobei berücksichtigt wird, daß - gemäß der oben definierten Halbgruppenaktion von G auf Ω - für alle $\omega \in \Omega$ $e\omega = \omega$ ist.

Im folgenden werde mit $\mathcal{H}_E$ die Menge der sogenannten *harmonischen Elementarfunktionen*, bezeichnet. Das sind genau diejenigen nichtnegativen Funktionen, die sich als endliche Linearkombinationen von Funktionen $h_{Q_i} \in \mathcal{H}_Q$, $i = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, darstellen lassen, so daß $Q_1, \ldots, Q_m$ paarweise disjunkt sind und eine Zerlegung von G bilden, also $G = \bigcup_{i=1}^m Q_i$ genügen:

$$\mathcal{H}_E := \{\sum_{i=1}^m \alpha_i\, h_{Q_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}_0^+, m \in \mathbb{N}, h_{Q_i} \in \mathcal{H}_Q \text{ für alle } i = 1, \ldots, m,$$
$$Q_i \cap Q_j = \emptyset \text{ für alle } i \neq j, i, j = 1, \ldots, m, \bigcup_{i=1}^m Q_i = G\}.$$

Mit (2.17) gilt also für $h_E := \sum_{i=1}^m \alpha_i\, h_{Q_i} \in \mathcal{H}_E$:

$$\begin{aligned} h_E(e) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i\, h_{Q_i}(e) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_{Q_i}}}(e\omega)\, d\nu(\omega) \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m \alpha_i\, \mathbb{1}_{F_{h_{Q_i}}}(e\omega)\, d\nu(\omega), \end{aligned}$$

wobei $\sum_{i=1}^m \alpha_i\, \mathbb{1}_{F_{h_{Q_i}}}$ eine Elementarfunktion auf Ω im Sinne von BAUER[3] ist. Mit Proposition 2.14 ist $\sum_{i=1}^m \alpha_i\, \mathbb{1}_{F_{h_{Q_i}}}$ sogar eine Normaldarstellung einer Elementarfunktion (vgl. BAUER[3], S. 62). Man beachte, daß eine Funktion $h_E \in \mathcal{H}_E$ im allgemeinen verschiedene Darstellungen besitzen kann. Doch $h_E(e)$ ist wohldefiniert.

Das Funktionensystem $\mathcal{H}_E$ hat folgende Eigenschaften:

$$h_E, h_F \in \mathcal{H}_E \Longrightarrow \begin{cases} \alpha h_E \in \mathcal{H}_E \; (\alpha \in \mathbb{R}_0^+) \\ h_E + h_F \in \mathcal{H}_E \\ \sup(h_E, h_F) \in \mathcal{H}_E \\ \inf(h_E, h_F) \in \mathcal{H}_E \end{cases}$$

Der Beweis ist elementar und werde an dieser Stelle nicht ausgeführt[17]. Nun sei $\mathcal{H}_E^\star$ die Menge aller beschränkten Funktionen h auf G, für die es eine isotone Folge $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von harmonischen Elementarfunktionen gibt, so daß $\sup_{n\in\mathbb{N}} h_n = h$ ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E^\star := \{h : G \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ beschränkt } \mid \text{es existiert eine Folge } \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \text{ s. d.} \\ h_j \leq h_{j+1} \text{ für alle } j \in \mathbb{N}, h_n \in \mathcal{H}_E \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sup_{n\in\mathbb{N}} h_n = h\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_E^\star$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$g, h \in \mathcal{H}_E^\star \Longrightarrow \begin{cases} \alpha g \in \mathcal{H}_E^\star \; (\alpha \in \mathbb{R}_0^+) \\ g + h \in \mathcal{H}_E^\star \\ \sup(g, h) \in \mathcal{H}_E^\star \\ \inf(g, h) \in \mathcal{H}_E^\star \end{cases}$$

Für den Beweis sei wieder auf die Literatur zur Maßtheorie verwiesen. Für jede Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ sei im folgenden $f^+ := \sup(f, 0)$ und $f^- := \sup(-f, 0)$. Damit gilt $f = f^+ - f^-$. Man definiert

$$\mathcal{H}^\star := \{h : G \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, h^+, h^- \in \mathcal{H}_E^\star\}.$$

Lemma 2.28 *Es ist $\mathcal{H}^\star = \mathcal{H}$.*

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß jede Funktion $h \in \mathcal{H}^\star$ harmonisch ist, also (1.3) erfüllt. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{H}_E^\star \subset \mathcal{H}$ ist. Sei $h := \sup_{n\in\mathbb{N}} h_n \in \mathcal{H}^\star$ und $h_n \in \mathcal{H}_E$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $g \in G$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}(G)} h\big(\eta(g)\big)\, d\mu(\eta) &= \int_{\mathcal{E}(G)} \lim_{n\to\infty} h_n\big(\eta(g)\big)\, d\mu(\eta) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{E}(G)} h_n\big(\eta(g)\big)\, d\mu(\eta) \end{aligned}$$

[17] Siehe z.B. BAUER[3], §10, und HERING & KRENGEL[24], §9.

$$\begin{aligned} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(h_n(g)\big) \\ &= h(g). \end{aligned}$$

Nun werde nachgewiesen, daß $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^\star$ ist, d.h., daß sich für jede beschränkte μ-harmonische Funktion h auf G sowohl ihr Positivteil h^+ als auch ihr Negativteil h^- darstellen läßt als obere Einhüllende von harmonischen Elementarfunktionen. Es reicht, die Behauptung für nichtnegatives $h \in \mathcal{H}$ zu beweisen ($h = h^+$). Dazu muß eine Folge $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}_E$ konstruiert werden, so daß $\sup_{n\in\mathbb{N}} h_n = h$ gilt. Diese Konstruktion verläuft analog zum Beweis von Satz 11.6 in Bauer[3]. □

Sei nun $h \in \mathcal{H}$, $h \geq 0$. Die Funktion h habe eine Darstellung

$$h = \lim_{n\to\infty} h_n, \text{ wobei } h_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n h_{Q_i^n} \in \mathcal{H}_E \text{ sei für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h(e) = \lim_{n\to\infty} h_n(e) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n h_{Q_i^n}(e) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_{Q_i^n}}}(e\omega)\, d\nu(\omega) \\ &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \mathbb{1}_{F_{h_{Q_i^n}}}(e\omega)\, d\nu(\omega). \end{aligned}$$

Gemäß Bauer[3], Satz 11.6, existiert eine $\mathcal{F}$-meßbare, beschränkte Funktion $\phi_h \geq 0$ auf Ω, so daß

$$\phi_h(e\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \mathbb{1}_{F_{h_{Q_i^n}}}(e\omega), \ \omega \in \Omega,$$

gilt. Folglich ist

$$h(e) = \int_\Omega \phi_h(e\omega)\, d\nu(\omega).$$

Um diese Integraldarstellung für $h(e)$ auf die ganze Halbgruppe G zu erweitern, beachte man folgendes: Für alle $h_Q \in \mathcal{H}_\mathcal{Q}$ und alle $g \in G$ gilt unter Berücksichtigung von Proposition 2.22

$$h_Q(g) = E_{\mu^\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(\mathbf{X}^n(g)\big) \;=\; E_{\mu^\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(g\mathbf{X}^n(e)\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= E_{\mu^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{g^{-1}Q}\big(\mathbf{X}^n(e)\big) \\
&= h_{g^{-1}Q}(e) = \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_{g^{-1}Q}}}(e\omega)\, d\nu(\omega) \\
&= \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_Q}}(g\omega)\, d\nu(\omega).
\end{aligned}
$$

Damit folgt für die Funktion h, definiert wie in (2.18)

$$
\begin{aligned}
h(g) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n h_{Q_i^n}(g) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \int_\Omega \mathbb{1}_{F_{h_{Q_i^n}}}(g\omega)\, d\nu(\omega) \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \mathbb{1}_{F_{h_{Q_i^n}}}(g\omega)\, d\nu(\omega) \\
&= \int_\Omega \phi_h(g\omega)\, d\nu(\omega).
\end{aligned}
$$

Kanonisch verläuft die Verallgemeinerung dieser Darstellung für nicht notwendig nichtnegative Funktionen $h \in \mathcal{H}$.

2.8 Die Poissondarstellung harmonischer Funktionen

Bevor das Hauptresultat dieses Kapitels formuliert werden kann, muß noch eine Bemerkung gemacht werden, welche für den Nachweis der Eindeutigkeit der Poissondarstellung von Bedeutung ist.

In Anlehnung an die in Abschnitt 2.6 getroffenen Definitionen, insbesondere (2.15), definiert man für alle $g \in G$

$$
\begin{aligned}
g : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\
h &\longmapsto g(h), \text{ wobei } g(h)(g') := h(gg') \text{ sei für alle } g' \in G.
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.7 *Es sei (T,ν) ein Rand von G. Für alle $\phi \in L^\infty(T,\nu)$ gilt*

$$J_T\big(g(\phi)\big) = g\big(J_T(\phi)\big).$$

(Zur Definition von $g(\phi)$ siehe (1.5).)

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} J_T\big(g(\phi)\big)(g') &= \int_T g(\phi)(g't)\,d\nu(t) \\ &= \int_T \phi(gg't)\,d\nu(t) \\ &= h_\phi(gg') \\ &= g(h_\phi)(g') \\ &= g\big(J_T(\phi)\big)(g'). \end{aligned}$$ □

Nun kann das Hauptresultat dieses Kapitels formuliert werden:

Satz 2.29 *Sei G eine diskrete Halbgruppe mit neutralem Element e und $\mathcal{E}(G) = \{\eta : G \longrightarrow G \,|\, \eta(gg') = g\eta(g')$ für alle $g, g' \in G\}$. Die Abbildung $g : G \longrightarrow G$, welche g' auf gg' abbildet, sei injektiv für alle $g \in G$. Es bezeichne $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in $\mathcal{E}(G)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbf{X}^n = X_n \circ \ldots \circ X_1$. Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{E}(G)$, welches folgende Bedingungen erfüllt:*

- $\mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(e) = g$ *für ein* $n \in \mathbb{N}\big) > 0$ *für alle* $e \neq g \in G$.
- $\mu^{\mathbb{N}}\big(X_1(e) \neq e\big) = 1$
- $\mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(g) = g$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}\big) = 0$ *für alle* $g \in G$.

Für jedes $Q \in \mathcal{Q} = \{Q \subset G \,|\, \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(\mathbf{X}^n(g)\big)$ existiert f.s. für alle $g \in G\}$ existiere ein $g \in G$, so daß $Q \supset gG$ ist. Dann existiert ein Rand (Ω, ν) von G, so daß folgendes gilt:

(1) *(Ω, ν) ist maximal.*

(2) *Ist $h : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine μ-harmonische Funktion, so existiert eine beschränkte und meßbare Funktion ϕ_h auf Ω, so daß für alle $g \in G$ gilt*

$$h(g) = \int_\Omega \phi_h(gt)\,d\nu(t). \tag{2.19}$$

Die Funktion ϕ_h ist eindeutig bestimmt modulo ν-Nullfunktionen, d.h.

$$\begin{array}{rcl} J_\Omega : L^\infty(\Omega,\nu) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \phi & \longmapsto & h_\phi(\cdot) = \displaystyle\int_\Omega \phi(\cdot\, t)\, d\nu(t) \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.
Den Rand (Ω,ν) *bezeichnet man als den* Poissonrand von G. *Die Darstellung* (2.19) *nennt man die* Poissondarstellung von h.

Bemerkung 2.8 *Der Poissonrand einer Halbgruppe ist also nicht eindeutig bestimmt.*

Beweis: In den Abschnitten 2.5 bis 2.7 wurde ein Rand (Ω,ν) von G konstruiert, so daß es zu jeder μ-harmonischen Funktion h auf G ein Element $\phi_h \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\nu)$ gibt mit der Eigenschaft, daß $h(g) = \int_\Omega \phi_h(gt)\, d\nu(t)$ für alle $g \in G$ gilt. Um die Richtigkeit der Eindeutigkeitsaussage über ϕ_h einzusehen, beachte Proposition 1.5. Demnach ist $J_\Omega : L^\infty(\Omega,\nu) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein Isomorphismus.
Jetzt bleibt also nur noch zu zeigen, daß (Ω,ν) maximal ist. Dazu sei (S,ρ) ein beliebiger Rand von G. Nach Lemma 1.2 und Proposition 1.5 existiert ein Isomorphismus

$$J_S : L^\infty(S,\rho) \longrightarrow \mathcal{H}_S \subset \mathcal{H}.$$

Offensichtlich ist $\mathcal{H}_S$ eine Unteralgebra von $\mathcal{H}$. Nun sei

$$\begin{array}{rcl} \theta : L^\infty(S,\rho) & \longrightarrow & L^\infty(\Omega,\nu) \\ \phi & \longmapsto & \theta(\phi) := J_\Omega^{-1} \circ J_S(\phi). \end{array}$$

Dann ist $\theta\big(L^\infty(S,\rho)\big) = J_\Omega^{-1} \circ J_S\big(L^\infty(S,\rho)\big) = J_\Omega^{-1}(\mathcal{H}_S)$ eine Unteralgebra von $L^\infty(\Omega,\nu)$.
Nach Definition ist $\theta : L^\infty(S,\rho) \longrightarrow J_\Omega^{-1}(\mathcal{H}_S)$ isomorph. Für alle $\phi \in L^\infty(S,\rho)$ gilt unter Berücksichtigung von Bemerkung 2.7

$$\begin{aligned} \theta\big(g(\phi)\big) &= J_\Omega^{-1} \circ J_S\big(g(\phi)\big) \\ &= J_\Omega^{-1}\Big(g\big(J_S(\phi)\big)\Big) \\ &= g\big(J_\Omega^{-1} \circ J_S(\phi)\big) \\ &= g\big(\theta(\phi)\big). \end{aligned}$$

Dabei sieht man die vorletzte Gleichung ein wie folgt: Für $h_\phi \in \mathcal{H}_S$ gilt

$$\begin{aligned} g\big(h_\phi\big)(g') = h_\phi(gg') = \int_S \phi(gg's)\,d\rho(s) = \int_S g(\phi)(g's)\,d\rho(s) = \\ = h_{g(\phi)}(g') = J_\Omega\big(g(\phi)\big)(g') = J_\Omega\Big(g\big(J_\Omega^{-1}(h_\phi)\big)\Big)(g'). \end{aligned}$$

Folglich gilt $J_\Omega^{-1}\big(g(h_\phi)\big) = g\big(J_\Omega^{-1}(h_\phi)\big)$.
Schließlich muß noch gezeigt werden, daß $\int_S \phi(s)\,d\rho(s) = \int_\Omega \theta\big(\phi(t)\big)\,d\nu(t)$ gilt. Doch es ist $h_\phi(e) = h_{\theta(\phi)}(e)$ und das liefert die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Eine Poissonformel für Sierpiński-Räume

Im vorliegenden Kapitel wird der in Kapitel 2 entwickelte Formalismus auf einen speziellen Wortraum $\mathcal{W}^\star$ angewendet. Die hieraus folgende Poissondarstellung μ-harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}^\star$ wird mit der auf Denker & Sato[9] zurückgehenden Martinranddarstellung P-harmonischer Funktionen auf einer Unterhalbgruppe $\mathcal{W}$ von $\mathcal{W}^\star$ verglichen. Dies wird eine Poissondarstellung P-harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}$ liefern, welche schließlich zu einer Poissondarstellung harmonischer Funktionen auf dem Sierpiński-Raum fortgesetzt wird.

3.1 Worträume

Zunächst wird die im weiteren Verlauf des Kapitels verwendete Notation bereitgestellt.

Es seien $\mathfrak{A} := \{1, \ldots, N\}$ und $\mathfrak{A}^\star := \{1\star, \ldots, N\star\}$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, zwei Alphabete und $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^\star$ deren Vereinigung.
Ferner sei $\mathcal{W}_n^\star := \mathfrak{B}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{W}^\star := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n^\star$ der Raum aller endlichen Wörter über $\mathfrak{B}$. Das Element $\emptyset$ wird als das *leere Wort* bezeichnet.
Analog sei $\mathcal{W}_n := \mathfrak{A}^n$ und $\mathcal{W} := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n$ der Raum aller endlichen Wörter über $\mathfrak{A}$.
Definiert man das Produkt zweier Wörter $\mathbf{p} = p_1 \ldots p_n$, $\mathbf{q} = q_1 \ldots q_m \in \mathcal{W}^\star \setminus \{\emptyset\}$

als $\mathbf{pq} := p_1 \dots p_n q_1 \dots q_m$ und $\mathbf{p}\emptyset := \emptyset\mathbf{p} := \mathbf{p}$, so ist $\mathcal{W}^\star$ eine diskrete Halbgruppe mit neutralem Element $\emptyset$. Man sieht sofort, daß $\mathcal{W}$ eine Unterhalbgruppe ist. Die Abbildung $\mathbf{p} : \mathcal{W}^\star \longrightarrow \mathcal{W}^\star$, welche jedes $\mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$ auf $\mathbf{pq}$ abbildet, ist injektiv für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$.

Auf $\mathcal{W}$ werde eine Involution $\sharp$ definiert wie folgt (vgl. Denker & Sato[9]):

$$\mathbf{w}^\sharp \;:=\; \begin{cases} \mathbf{u}ba^l & : \quad \mathbf{w} = \mathbf{u}ab^l, \;\text{ wobei } \mathbf{u} \in \mathcal{W},\; a, b \in \mathfrak{A},\; a \neq b,\; l \in \mathbb{N}, \\ \mathbf{w} & : \quad \mathbf{w} = a^k, \;\text{ wobei } a \in \mathfrak{A},\; k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ nennt man $\mathbf{w}^\sharp$ das zu $\mathbf{w}$ *konjugierte* Wort.

Für $\mathbf{p} = p_1 \dots p_n \in \mathcal{W}^\star$, $n \geq 1$, sei $\tau(\mathbf{p}) := p_n$ der letzte Buchstabe und $d(\mathbf{p}) = n$ die Wortlänge von $\mathbf{p}$. Man setze $\tau(\emptyset) := \emptyset$ und $d(\emptyset) := 0$. Ist $n \geq 2$ und $j \in \mathfrak{B}$, so sei $\mathbf{p}(j) := p_1 \dots p_{n-1} j$. Insbesondere ist dann also $\mathbf{p} = \mathbf{p}\big(\tau(\mathbf{p})\big)$. Weiter sei in diesem Falle $\mathbf{p}^- := p_1 \dots p_{n-1}$. Man definiert $\mathbf{p}^- := \emptyset$, falls $\mathbf{p} \in \mathfrak{B} \cup \{\emptyset\}$.

Der einseitige Shiftraum über $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{A}$ werde mit $\Sigma^\star := \mathfrak{B}^{\mathbb{N}}$ bzw. $\Sigma := \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $\Sigma \subset \Sigma^\star$. Zwei Folgen $\alpha = \alpha_1\alpha_2...$ und $\beta = \beta_1\beta_2...$ in Σ nennt man äquivalent, falls entweder $\alpha = \beta$ ist oder falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n)^\sharp = \beta_1\beta_2...\beta_n$ für alle $n \geq n_0$. Diese Äquivalenzrelation werde mit $\sim$ gekennzeichnet. (Beispielsweise ist $123^\infty \sim 132^\infty$.)
Eine Metrik ρ auf Σ sei gegeben wie folgt: Für $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots$, $\beta = \beta_1\beta_2 \dots \in \Sigma$ sei $\rho(\alpha, \beta) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 - \delta_{\alpha_n\beta_n})$, wobei

$$\delta_{\alpha_n\beta_n} := \begin{cases} 1 & : \quad \alpha_n = \beta_n \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

die Diracfunktion bezeichne.
Für $\xi = \xi_1\xi_2 \dots \in \Sigma^\star$ und alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\xi|_n = \xi_1 \dots \xi_n$. Außerdem sei $\xi|_0 = \emptyset$ für alle $\xi \in \Sigma^\star$.

3.2 Die Poissondarstellung harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}^\star$

Nachstehend wird bewiesen, daß $\Sigma^\star$, ausgestattet mit dem Bernoulli-Maß $\nu^\star$, eine Version des Poissonrandes von $\mathcal{W}^\star$ ist. Gemäß Satz 2.29 folgt daraus eine Poissondarstellung harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}^\star$ über $\Sigma^\star$.

Es sei $\mathcal{E}(\mathcal{W}^\star) := \{\eta_b \,|\, b \in \mathfrak{B}\}$, wobei $\eta_b(\mathbf{p}) := \mathbf{p}b$ für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$ und alle $b \in \mathfrak{B}$ sei. Damit gilt insbesondere $\eta_b(\mathbf{pq}) = \mathbf{p}\,\eta_b(\mathbf{q})$ für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$ und alle $b \in \mathfrak{B}$. Es sei $\mu(\eta_b) = \frac{1}{\operatorname{card} \mathfrak{B}} = \frac{1}{2N}$ für alle $b \in \mathfrak{B}$. Somit ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{E}(\mathcal{W}^\star)$.
Der in Abschnitt 1.3 definierte stochastische Prozeß auf $\mathcal{E}(\mathcal{W}^\star)^{\mathbb{N}}$ werde mit $\{\mathbf{X}^n(\mathbf{p})\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Hierbei sei $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$. Um Satz 2.29 anwenden zu können, muß eingesehen werden, daß $\mu^{\mathbb{N}}$ die dort geforderten Eigenschaften besitzt:

- Es sei $\mathbf{p} := p_1 \dots p_m \in \mathcal{W}^\star$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(\emptyset) = \mathbf{p} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\big) = \mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^m(\emptyset) = \mathbf{p}\big) = \left(\frac{1}{2N}\right)^m > 0$.
- Offensichtlich ist $\mu^{\mathbb{N}}(X_1(\emptyset) \neq \emptyset) = 1$.
- Wegen $\mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\big) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$ ist auch die dritte Bedingung erfüllt.

Gemäß Definition 1.4 ist eine Funktion h auf $\mathcal{W}^\star$ μ-harmonisch, falls für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$ gilt

$$h(\mathbf{p}) = \sum_{b\in\mathfrak{B}} \frac{1}{2N}\, h\big(\eta_b(\mathbf{p})\big) = \frac{1}{2N} \sum_{b\in\mathfrak{B}} h(\mathbf{p}b).$$

Nach Satz 2.29 existiert ein Rand (Ω, ν) von $\mathcal{W}^\star$, so daß für jede μ-harmonische Funktion h auf $\mathcal{W}^\star$ eine Funktion $\phi_h \in L^\infty(\Omega, \nu)$ existiert mit der Eigenschaft, daß für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$

$$h(\mathbf{p}) = \int_\Omega \phi_h(\mathbf{p}t)\, d\nu(t)$$

gilt. Im folgenden wird nachgewiesen, daß $\Sigma^\star$, ausgestattet mit dem Bernoulli-Maß $\nu^\star$, eine Version des Raumes (Ω, ν) darstellt.

Zunächst muß eingesehen werden, daß $(\Sigma^\star, \nu^\star)$ überhaupt ein Rand von $\mathcal{W}^\star$ ist: Für alle $\emptyset \neq \mathbf{p} = p_1 \dots p_n \in \mathcal{W}^\star$ sei durch $[\mathbf{p}]^\star := \{\xi \in \Sigma^\star \,:\, \xi|_n = \mathbf{p}\}$ eine Zylindermenge definiert. Es sei speziell $[\emptyset]^\star := \Sigma^\star$. Die Zylindermengen erzeugen eine Topologie $\tau(\Sigma^\star)$ auf $\Sigma^\star$. Es bezeichne $\mathcal{B}(\Sigma^\star)$ die Borelsche σ-Algebra in $\Sigma^\star$. Offensichtlich ist durch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}^\star \times \Sigma^\star & \longrightarrow & \Sigma^\star \\ (p_1 \dots p_n, \xi_1\xi_2 \dots) & \longmapsto & p_1 \dots p_n \xi_1 \xi_2 \dots \\ (\emptyset, \xi_1\xi_2 \dots) & \longmapsto & \xi_1\xi_2 \dots \end{array}$$

eine stetige und damit meßbare Halbgruppenaktion von $\mathcal{W}^\star$ auf $\Sigma^\star$ gegeben. Das Bernoullimaß auf $\mathcal{B}(\Sigma^\star)$ ist definiert durch $\nu^\star := \prod_{n=1}^\infty \tilde{\nu}$, wobei $\tilde{\nu}$ die Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}$ bezeichne. Folglich ist $\nu^\star\big([\mathbf{p}]^\star\big) = (2N)^{-d(\mathbf{p})}$ für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$.

Proposition 3.1 *$\nu^\star$ ist μ-stationär.*

Beweis: Es muß nachgewiesen werden, daß für alle $\emptyset \neq \mathbf{p} = p_1 \dots p_n \in \mathcal{W}^\star$ und für alle $\mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$ ${\nu^\star}_{\mathbf{p}}([\mathbf{q}]) = \mu_{\mathbf{p}} \star \nu^\star([\mathbf{q}])$ gilt. Für $\mathbf{q} = q_1 \dots q_m \in \mathcal{W}^\star$ erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma^\star} \mathbb{1}_{[\mathbf{q}]}(\xi)\, d\nu^\star_{\mathbf{p}}(\xi) &= \int_{\Sigma^\star} \mathbb{1}_{[\mathbf{q}]}(\mathbf{p}\xi)\, d\nu^\star(\xi) \\
&= \nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star \,|\, p_1 \dots p_n \xi \in [q_1 \dots q_m]\}\big) \\
&= \begin{cases} \mathbb{1}_{\{p_i = q_i; i=1,\dots,m\}} & : \quad n \geq m \\ \mathbb{1}_{\{p_i = q_i; i=1,\dots,n\}} \cdot \big(\frac{1}{2N}\big)^{m-n} & : \quad m > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2N} \sum_{\mathcal{E}(\mathcal{W}^\star)} \mathbb{1}_{\{p_i = q_i; i=1,\dots,m\}} & : \quad n \geq m \\ \frac{1}{2N} \sum_{\mathcal{E}(\mathcal{W}^\star)} \mathbb{1}_{\{p_i = q_i; i=1,\dots,n\}} \cdot \big(\frac{1}{2N}\big)^{m-n} & : \quad m > n \end{cases} \\
&= \frac{1}{2N} \sum_{\mathcal{E}(\mathcal{W}^\star)} \nu^\star\{\xi \in \Sigma^\star \,|\, \eta(\mathbf{p})\xi \in [q_1 \dots q_m]\} \\
&= \int_{\mathcal{E}(\mathcal{W}^\star)} \nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star \,|\, \eta(\mathbf{p})\xi \in [q_1 \dots q_m]\}\big)\, d\mu(\eta) \\
&= \int_{\mathcal{E}(\mathcal{W}^\star)} \int_{\Sigma^\star} \mathbb{1}_{[q_1 \dots q_m]}\big(\eta(\mathbf{p})\xi\big)\, d\nu^\star(\xi) d\mu(\eta) \\
&= \int_{\mathcal{W}^\star} \int_{\Sigma^\star} \mathbb{1}_{[\mathbf{q}]}(s\xi)\, d\nu^\star(\xi) d\mu_{\mathbf{p}}(s) \\
&= \int_{\Sigma^\star} \mathbb{1}_{[\mathbf{q}]}(\xi)\, d(\mu_{\mathbf{p}} \star \nu^\star)(\xi).
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{q} = \emptyset$ ist die Behauptung trivial. □

Gemäß Lemma 1.2 und Proposition 1.5 ist also für jede Funktion $\psi \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$ die Funktion $h_\psi : \mathcal{W}^\star \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$h_\psi(\mathbf{p}) = \int_{\Sigma^\star} \psi(\mathbf{p}\xi)\, d\nu^\star(\xi) = \int_{\Sigma^\star} \psi(\xi)\, d\nu^\star_{\mathbf{p}}(\xi),\ \mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star,$$

beschränkt und μ-harmonisch. Ist $\mathcal{H}_{\Sigma^\star} := \{h_\psi(\,\cdot\,) := \int_{\Sigma^\star} \psi(\cdot\,\xi)\, d\nu^\star(\xi) \,|\, \psi \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)\}$, so bleibt gemäß Definition 1.6 jetzt noch zu zeigen, daß die Abbildung $J_{\Sigma^\star} : L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star) \longrightarrow \mathcal{H}_{\Sigma^\star}$, welche ψ auf h_ψ abbildet, injektiv ist. Weiter unten wird dieser Punkt wieder aufgenommen werden. Vorerst sollen einige Überlegungen angestellt werden, die Auskunft geben über den Zusammenhang zwischen der Menge $\Sigma^\star$ und der in Abschnitt 2.5 konstruierten Menge Ω.

Es sei $\mathcal{Q}^{\mathcal{W}^\star} := \{Q \subset \mathcal{W}^\star \mid \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_Q\big(\mathbf{X}^n(\mathbf{p})\big)$ existiert $\mu^{\mathbb{N}}$-f.s. für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star\}$. Sei $\xi = \xi_1\xi_2\ldots \in \Sigma^\star$. Dann gilt $\xi|_n \in \mathcal{W}^\star$ und damit $\xi|_n\mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$. Es sei

$$]\xi|_n[\ := \bigcup_{\mathbf{q}\in\mathcal{W}^\star} \{\xi|_n\mathbf{q}\}$$

die Menge aller Wörter in $\mathcal{W}^\star$, welche sich als Hintereinanderschaltung von $\xi|_n$ und einem beliebigen Wort aus $\mathcal{W}^\star$ schreiben lassen. Nach Definition von $\mathcal{E}(\mathcal{W}^\star)$ ist $]\xi|_n[\ \in \mathcal{Q}^{\mathcal{W}^\star}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält für alle $\mathbf{p} = p_1 \ldots p_m \in \mathcal{W}^\star$

$$h_{]\xi|_n[}(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & : \ \exists\, i \in \{1, \ldots, m\},\ \text{so daß } \xi_i \neq p_i \\ 1 & : \ \mathbf{p} \in\ ]\xi|_n[\\ \left(\frac{1}{2N}\right)^{n-m} & : \ \xi_i = p_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, m,\ m < n \end{cases}$$

und

$$h_{]\xi|_n[}(\emptyset) = \left(\frac{1}{2N}\right)^n.$$

Die Mengenfolge $\big\{]\xi|_n[\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist strikt abfallend, d.h. es gilt $]\xi|_n[\ \supset\ ]\xi|_{n+1}[$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt auch $h_{]\xi|_n[} \geq h_{]\xi|_{n+1}[}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Von nun an sei $\Omega = \{\mathfrak{M} \,|\, \mathfrak{M}$ ist $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}^{\mathcal{W}^\star}}$-Ultrafilter$\}$ und $F_{h_{]\xi|_n[}} = \{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, h_{]\xi|_n[} \in \mathfrak{M}\}$. Weiter sei, wie in Abschnitt 2.5 angegeben, $\nu(F_{h_{]\xi|_n[}}) = h_{]\xi|_n[}(e)$. Nach Hilfssatz 2.16 ist auch $\{F_{h_{]\xi|_n[}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abfallende Mengenfolge, d.h. es gilt $F_{h_{]\xi|_n[}} \supset F_{h_{]\xi|_{n+1}[}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 3.1 *Für alle* $\xi \in \Sigma^\star$ *gilt* $\#\{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, \mathfrak{M} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{]\xi|_n[}}\} \leq 1$.

Beweis: Angenommen, die Menge $\{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, \mathfrak{M} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{]\xi|_n[}}\}$ enthalte zwei $\mathcal{H}_{Q^{\mathcal{W}^\star}}$-Ultrafilter $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Es sei $h_Q \in \mathfrak{M}_1$ für ein $Q \in \mathcal{Q}^{\mathcal{W}^\star}$. Dann ist $Q \neq \emptyset$. Aus der Definition von $\mathcal{Q}^{\mathcal{W}^\star}$ folgt durch eine einfache Überlegung, daß Q Obermenge von mindestens einer Menge der Form $]\mathbf{p}[$, wobei $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$ sei, sein muß. (Andernfalls wäre $h_Q = \mathbf{0}$, was der Tatsache widerspricht, daß h_Q ein Element des $\mathcal{H}_{Q^{\mathcal{W}^\star}}$-Ultrafilters $\mathfrak{M}_1$ ist.) Andererseits muß auch $h_{Q\cap]\xi|_n[} \neq \mathbf{0}$ gelten für alle $n \in \mathbb{N}$. Demnach muß für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch der Schnitt $Q \cap \,]\xi|_n[$ eine Zylindermenge $]\mathbf{q}_n[$, wobei $\mathbf{q}_n \in \mathcal{W}^\star$ sei, enthalten. Also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $Q \supset \,]\xi|_{n_0}[$ ist. Daraus folgt $Q \in \mathfrak{M}_2$. Da Q beliebig gewählt war, gilt $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Doch $\mathfrak{M}_1$ ist $\mathcal{H}_{Q^{\mathcal{W}^\star}}$-Ultrafilter, kann also in keinem anderen $\mathcal{H}_{Q^{\mathcal{W}^\star}}$-Filter echt enthalten sein. Demnach ist $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$. □

Daß $\#\{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, \mathfrak{M} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{]\xi|_n[}}\} \neq 0$ ist für alle $\xi \in \Sigma^\star$, folgt aus der anschließenden Proposition.
Der Beweis zeigt, daß zu jedem $Q \in \mathcal{Q}^{\mathcal{W}^\star} \setminus \{\emptyset\}$ ein $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$ existiert, so daß $Q \supset \mathbf{p}\,\mathcal{W}^\star = \,]\mathbf{p}[$ ist.
Die vorangegangene Bemerkung rechtfertigt die Definition der folgenden Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} : \Sigma^\star \;&\longrightarrow\; \Omega \\ \xi \;&\longmapsto\; \mathbf{N}(\xi) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{]\xi|_n[}}. \end{aligned}$$

(Insbesondere gilt dann für jede Zylindermenge $[\mathbf{q}] \in \Sigma^\star$, $\mathbf{\emptyset} \neq \mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$ die Gleichheit $\mathbf{N}\big([\mathbf{q}]\big) = F_{h_{]\mathbf{q}[}}$, wobei $\mathbf{N}\big([\mathbf{q}]\big)$ zu verstehen ist als $\bigcup_{\xi\in[\mathbf{q}]} \mathbf{N}(\xi)$.)

Proposition 3.2 $\mathbf{N}$ *ist bijektiv und maßerhaltend.*

Beweis: Zunächst soll die Injektivität von $\mathbf{N}$ nachgewiesen werden. Dazu seien $\xi = \xi_1\xi_2\ldots, \zeta = \zeta_1\zeta_2\ldots \in \Sigma^\star$, $\xi \neq \zeta$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $]\xi|_n[\, \cap \,]\zeta|_n[\, = \emptyset$ gilt für alle $n \geq n_0$. Also gilt $F_{h_{]\xi|_n[}} \cap F_{h_{]\zeta|_n[}} = \{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, h_{]\xi|_n[}, h_{]\zeta|_n[} \in \mathfrak{M}\} = \emptyset$ für alle $n \geq n_0$, denn $\mathfrak{M}$ ist abgeschlossen bzgl. $\otimes$ und es gilt $\mathbf{0} \notin \mathfrak{M}$. Insbesondere gilt dann $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{]\xi|_n[}} \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{]\zeta|_n[}} = \mathbf{N}(\xi) \cap \mathbf{N}(\zeta) = \emptyset$. Dies impliziert $\mathbf{N}(\xi) \neq \mathbf{N}(\zeta)$.

Nun sei $\mathfrak{M} \in \Omega$. Für jede Zylindermenge $]\xi|_n[$ in $\mathcal{W}^\star$ gilt entweder $h_{]\xi|_n[} \in \mathfrak{M}$ oder $h_{(]\xi|_n[)^C} \in \mathfrak{M}$. Da sich $\mathcal{W}^\star$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Vereinigung von $(2N)^n$ Mengen der Form $]\xi|_n[$ darstellen läßt, kann für festes $n \in \mathbb{N}$ nicht gelten $h_{(]\xi|_n[)^C} \in \mathfrak{M}$ für alle $\xi \in \Sigma^\star$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert demnach ein $\xi \in \Sigma^\star$, so daß $h_{]\xi|_n[} \in \mathfrak{M}$ gilt. Sei nun $h_{]\xi|_n[} \in \mathfrak{M}$ für ein geeignetes $\xi \in \Sigma^\star$ und $h_{]\zeta|_{n+1}[} \in \mathfrak{M}$ für ein geeignetes $\zeta = \zeta_1\zeta_2 \ldots \in \Sigma^\star$. Dann gilt $\zeta|_{n+1} = \xi|_n\, \xi_{n+1}$. (Wäre nämlich $\zeta_i \neq \xi_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so folgte $]\xi|_i[\cap]\zeta|_i[\; = \emptyset$. Wegen $]\xi|_n[\;\subset\;]\xi|_i[$ und $]\zeta|_{n+1}[\;\subset\;]\zeta|_i[$ erhielte man $h_{]\xi|_i[}$, $h_{]\zeta|_i[} \in \mathfrak{M}$. Also folgte $h_{]\xi|_i[} \otimes h_{]\zeta|_i[} = h_{]\xi|_i[\cap]\zeta|_i[} = h_\emptyset = h_{\mathbf{0}} \in \mathfrak{M}$, was der Definition eines $\mathcal{H}_{Q\mathcal{W}^\star}$-Ultrafilters widerspricht. Also ist $\xi_i = \zeta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.) Das impliziert, daß ein $\xi \in \Sigma^\star$ existiert mit der Eigenschaft, daß $h_{]\xi|_n[} \in \mathfrak{M}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist gleichbedeutend mit der Tatsache, daß $\mathfrak{M} = \mathbf{N}(\xi)$ ist.

Um einzusehen, daß $\mathbf{N}$ maßerhaltend ist, beachte man folgendes. Für alle $\mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$ gilt

$$\begin{aligned}\nu^\star([\mathbf{q}]) = \Big(\frac{1}{2N}\Big)^{d(\mathbf{q})} &= \lim_{n\to\infty} \mu^{\mathbb{N}}\big(\mathbf{X}^n(\emptyset) \in \,]\mathbf{q}[\big) = \\ &= h_{]\mathbf{q}[}(\emptyset) = \nu(F_{h_{]\mathbf{q}[}}) = \nu\big(\mathbf{N}([\mathbf{q}])\big).\end{aligned} \qquad \square$$

Bemerkung 3.2 *Für alle* $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$, $\xi \in \Sigma^\star$ *gilt* $\mathbf{N}(\mathbf{p}\xi) = \mathbf{p}\,\mathbf{N}(\xi)$.

Beweis: Sei $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$, $\xi \in \Sigma^\star$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{pN}(\xi) &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{p}\{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, h_{]\xi|_n[} \in \mathfrak{M}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\mathbf{p}\,\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, h_{\mathbf{p}^{-1}\mathbf{p}]\xi|_n[} \in \mathfrak{M}\} = \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\mathbf{p}\,\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, h_{\mathbf{p}]\xi|_n[} \in \mathbf{p}\,\mathfrak{M}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\mathfrak{M} \in \Omega \,|\, h_{\mathbf{p}]\xi|_n[} \in \mathfrak{M}\} = \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{h_{\mathbf{p}]\xi|_n[}} = \mathbf{N}(\mathbf{p}\xi).\end{aligned} \qquad \square$$

Bislang war noch nicht abschließend gezeigt worden, daß $(\Sigma^\star, \nu^\star)$ überhaupt ein Rand von $\mathcal{W}^\star$ ist. Das soll nun wie folgt geschehen: Es wird die Existenz eines äquivarianten Isomorphismus $\mathbf{Z}$ von $L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$ nach $L^\infty(\Omega, \nu)$ mit der Eigenschaft, daß $\int_{\Sigma^\star} f(\xi)\, d\nu^\star(\xi) = \int_\Omega (\mathbf{Z}f)(\omega)\, d\nu(\omega)$, $f \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$, gilt, nachgewiesen. Damit ist $(\Sigma^\star, \nu^\star)$ eine Version des Poissonrandes von $\mathcal{W}^\star$, insbesondere also ein Rand von $\mathcal{W}^\star$. (Denn aus der Existenz dieses Isomorphismus $\mathbf{Z}$ folgt insbesondere die Injektivität der Abbildung $J_{\Sigma^\star} : L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star) \longrightarrow \mathcal{H}_{\Sigma^\star}$.)

Es sei

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z} : L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star) & \longrightarrow & L^\infty(\Omega, \nu) \\ f & \longmapsto & \mathbf{Z}f, \text{ wobei } (\mathbf{Z}f)(\omega) := f\big(\mathbf{N}^{-1}(\omega)\big) \text{ ist.} \end{array}$$

Proposition 3.3 *Die Abbildung* $\mathbf{Z}$ *ist bijektiv, äquivariant und erfüllt* $\int_{\Sigma^\star} f(\xi)\, d\nu^\star(\xi) = \int_\Omega (\mathbf{Z}f)(\omega)\, d\nu(\omega)$ *für alle* $f \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$.

Beweis: Für den Beweis der Surjektivität von $\mathbf{Z}$ sei $\tilde{f} \in L^\infty(\Omega, \nu)$ und $f := \tilde{f} \circ \mathbf{N}$. Dann ist $f \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$. Außerdem gilt für alle $\omega \in \Omega$

$$(\mathbf{Z}f)(\omega) = f\big(\mathbf{N}^{-1}(\omega)\big) = (\tilde{f} \circ \mathbf{N})\big(\mathbf{N}^{-1}(\omega)\big) = \tilde{f}(\omega),$$

also $\mathbf{Z}(f) = \tilde{f}$. Umgekehrt seien nun $f_1 \neq f_2 \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu)$. Dann gilt $f_1 = \mathbf{Z}\big(f_1(\mathbf{N})\big) \neq \mathbf{Z}\big(f_2(\mathbf{N})\big) = f_2$. Also folgt mit der Bijektivität von $\mathbf{N}$ $\mathbf{Z}(f_1) = \mathbf{Z}(f_1 \circ \mathbf{N} \circ \mathbf{N}^{-1}) \neq \mathbf{Z}(f_2 \circ \mathbf{N} \circ \mathbf{N}^{-1}) = \mathbf{Z}(f_2)$.

Außerdem erhält man unter Berücksichtigung der Definition der Abbildung $\mathbf{p}$ auf $L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$ $\big($vgl. (1.5)$\big)$ und Bemerkung 3.2 für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$, $f \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$ und alle $\xi \in \Sigma^\star$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\big(\mathbf{p}(f)\big)\big(\mathbf{N}(\xi)\big) &= \mathbf{p}\Big(f\big(\mathbf{N}^{-1}\big(\mathbf{N}(\xi)\big)\big)\Big) = \mathbf{p}\big(f(\xi)\big) = f(\mathbf{p}\,\xi) = \\ = f\Big(\mathbf{N}^{-1}\big(\mathbf{N}(\mathbf{p}\,\xi)\big)\Big) &= \mathbf{Z}(f)\big(\mathbf{N}(\mathbf{p}\,\xi)\big) = \mathbf{Z}(f)\big(\mathbf{p}\mathbf{N}(\xi)\big) = \mathbf{p}\big(\mathbf{Z}(f)\big)\big(\mathbf{N}(\xi)\big). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für alle $f \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$

$$\mathbf{Z}\big(\mathbf{p}(f)\big)(\omega) = \mathbf{p}\big(\mathbf{Z}(f)\big)(\omega) \;\; \nu\text{-}f.s.$$

Die Maßtreue von $\mathbf{N}$ schließt den Beweis, daß $(\Sigma^\star, \nu^\star)$ eine Version des Poissonrandes von $\mathcal{W}^\star$ ist, ab. □

Also existiert für jede μ-harmonische Funktion h auf $\mathcal{W}^\star$ eine Funktion $\phi_h \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$ mit der Eigenschaft, daß für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$

$$h(\mathbf{p}) = \int_{\Sigma^\star} \phi_h(\mathbf{p}t)\, d\nu^\star(t)$$

gilt.

3.3 Sierpiński-Räume

Der Vollständigkeit halber werde an dieser Stelle der Begriff des Sierpiński-Raumes erläutert. (Man vergleiche [9, 16, 25, 30, 31].)

Es sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ und $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^{N-1}$. Ferner sei ein reguläres $(N-1)-$Simplex gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta := \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \sum_{i=2}^{N} c_i\,(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) \mid c_i \geq 0 \text{ für alle } i \in \{2, \dots, N\}, \sum_{i=2}^{N} c_i \leq 1,\\ \{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1 \mid i = 2, \dots, N\} \text{ linear unabhängig},\\ |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \text{ für alle } i, j \in \{2, \dots, N\}, i \neq j\}.\end{aligned}$$

Für alle $a \in \mathfrak{A}$ sei

$$\begin{aligned} F_a : \Delta &\longrightarrow \Delta \\ \mathbf{x} &\longmapsto \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) + \mathbf{x}_a. \end{aligned}$$

Damit ist F_a für alle $a \in \mathfrak{A}$ eine kontrahierende Ähnlichkeitsabbildung mit Kontraktionszahl $\frac{1}{2}$ und Fixpunkt $\mathbf{x}_a$. Gemäß FALCONER[16] gibt es also eine eindeutig bestimmte, nichtleere und kompakte Menge $\mathcal{S}^{N-1}$, welche unter $F_{\mathfrak{A}} := \{F_a \mid a \in \mathfrak{A}\}$ invariant ist, also der Gleichung

$$\mathcal{S}^{N-1} = \bigcup_{a \in \mathfrak{A}} F_a(\mathcal{S}^{N-1})$$

genügt. Damit ist $\mathcal{S}^{N-1}$ strikt selbstähnlich (vgl. FALCONER[16], §9.2).
Für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ sei nun

$$F_{\mathbf{w}} = \begin{cases} F_{w_1} \circ \dots \circ F_{w_n} & : \mathbf{w} = w_1 \dots w_n \\ \text{Identität} & : \mathbf{w} = \emptyset. \end{cases}$$

Damit hat $\mathcal{S}^{N-1}$ folgende Darstellung:

$$\mathcal{S}^{N-1} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{d(\mathbf{w}) = n} F_{\mathbf{w}}(\Delta).$$

Definition 3.1 *Für alle $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, wird $\mathcal{S}^{N-1}$ als der* $\big((N-1)$-dimensionale$\big)$ Sierpiński-Raum *bezeichnet. Insbesondere erhält man für den Fall $N = 3$ das sogenannte* Sierpiński-Dreieck.

Es sei

$$\begin{aligned}\Pi : \Sigma &\longrightarrow \mathcal{S}^{N-1} \\ \alpha &\longmapsto \lim_{n\to\infty} F_{\alpha|_n}(\Delta).\end{aligned}$$

Σ sei mit der Produkttopologie ausgestattet, welche durch die diskrete Topologie auf jedem Faktor $\mathfrak{A}$ induziert wird. Gemäß HUTCHINSON[25] ist Π eine stetige Surjektion auf $\mathcal{S}^{N-1}$. Für die kritische Menge $\mathcal{K}(\mathcal{S}^{N-1})$ von $\mathcal{S}^{N-1}$ erhält man $\mathcal{K}(\mathcal{S}^{N-1}) = \{ij^{\infty}, ji^{\infty} \,|\, i,j \in \mathfrak{A}, i \neq j\}$. Also folgt für die postkritische Menge $\mathcal{P}(\mathcal{S}^{N-1})$ die Gleichheit $\mathcal{P}(\mathcal{S}^{N-1}) = \{j^{\infty} \,|\, j \in \mathfrak{A}\}$. (Zur Definition der Begriffe *kritische* und *postkritische Menge* sei auf KIGAMI[31] verwiesen.) Somit ist $\mathcal{S}^{N-1}$ für alle $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, eine postkritisch endliche (kurz: p.c.f.), selbstähnliche Menge.

3.4 Die Martinranddarstellung P-harmonischer Funktionen

In diesem Abschnitt wird zunächst die Martinranddarstellung P-harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}$ über einen Sierpiński-Raum angegeben (vgl. DENKER & SATO[9, 10]). Im Anschluß daran wird skizziert, wie sich hieraus eine Darstellung harmonischer Funktionen auf einem Sierpiński-Raum herleiten läßt. Der Einfachheit zuliebe wird im verbleibenden Teil dieser Arbeit anstatt $\mathcal{S}^{N-1}$ nur noch $\mathcal{S}$ geschrieben.

Es sei $\big(\Omega, \sigma(\Omega), P\big)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markoffkette auf Ω mit Zustandsraum $\mathcal{W}$ und folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten: Für $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, $a \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P(Y_{n+1} = \mathbf{w}a \,|\, Y_n = \mathbf{w}) =: p(\mathbf{w}, \mathbf{w}a) = p(\mathbf{w}, \mathbf{w}^{\sharp}a) = \begin{cases} \frac{1}{2N} & : \quad \mathbf{w}^{\sharp} \neq \mathbf{w} \\ \frac{1}{N} & : \quad \mathbf{w}^{\sharp} = \mathbf{w}. \end{cases}$$

Für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ bezeichne $P^{\mathbf{w}}$ dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß, welches die Verteilung des Prozesses beschreibt, wenn in $\mathbf{w}$ gestartet wird, also

$$P^{\mathbf{w}}(Y_1 = \mathbf{w}_1, \ldots, Y_n = \mathbf{w}_n) = P(Y_1 = \mathbf{w}_1, \ldots, Y_n = \mathbf{w}_n \,|\, Y_1 = \mathbf{w}),$$

wobei $\mathbf{w}_i \in \mathcal{W}$ sei für $i = 1, \ldots, n$.
Der *Markoffoperator* P der Markoffkette $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wird auf der Menge aller reellwertigen Funktionen auf $\mathcal{W}$ wie folgt definiert:

$$Pf(\mathbf{w}) := \sum_{\mathbf{v}\in\mathcal{W}} p(\mathbf{w}, \mathbf{v}) f(\mathbf{v}).$$

Eine Funktion $f : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *P-harmonisch*, falls Pf wohldefiniert ist und $Pf = f$ gilt. Im folgenden bezeichne $\mathcal{H}(P)$ die Menge aller beschränkten, P-harmonischen Funktionen. Dann gilt

Satz 3.4 (Denker & Sato [9]) (a) *Zu jeder beschränkten, P-harmonischen Funktion h existiert eine eindeutig bestimmte beschränkte und integrierbare Funktion ϕ_h auf $\mathcal{S}$, so daß für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ gilt*

$$h(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{S}} k(\mathbf{w}, \xi)\phi_h(\xi)\, d\mu_1(\xi).$$

Hierbei bezeichnet $k(\mathbf{w}, \xi)$ den Martinkern der Markoffkette $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und μ_1 erfüllt die Gleichung $1 = \int_{\mathcal{S}} k(\mathbf{w}, \xi)\, d\mu_1(\xi)$.
(b) *Es gilt $\lim_{n\to\infty} h(Y_n) = \phi_h(\lim_{n\to\infty} Y_n)$ $P^{\mathbf{w}}$-f.s. für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.*
(c) *Ferner gilt $h(\mathbf{w}) = E_{P^{\mathbf{w}}}\phi_h(\lim_{n\to\infty} Y_n)$ für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.*
(d) *Ist ϕ eine μ_1-integrierbare, beschränkte Funktion auf $\mathcal{S}$, so ist die Funktion h_ϕ, definiert durch*

$$h_\phi(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{S}} k(\mathbf{w}, \xi)\phi(\xi)\, d\mu_1(\xi), \quad \mathbf{w} \in \mathcal{W},$$

beschränkt und P-harmonisch.

Damit ist

$$\begin{array}{rcl} I : L^\infty(\mathcal{S}, \mu_1) & \longrightarrow & \mathcal{H}(P) \\ \phi & \longmapsto & I(\phi) := h_\phi(\,\cdot\,) = \displaystyle\int_{\mathcal{S}} k(\cdot, \xi)\phi(\xi)\, d\mu_1(\xi) \end{array}$$

ein Isomorphismus.
Die Abbildung Π (vgl. Abschnitt 3.3) ist Lipschitzstetig und surjektiv und es gilt $\Pi(\alpha) = \Pi(\beta)$ genau dann, wenn $\alpha \sim \beta$ (siehe Denker & Sato[9]). Damit ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma/\!\sim \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{S} \\ \overline{\alpha} \quad &\longmapsto \quad \Pi(\alpha), \text{ wobei } \alpha \in \overline{\alpha} \text{ sei.} \end{aligned}$$

Gemäß Proposition 4.2 in DENKER & SATO[9] sind $\mathcal{S}$ und $\Sigma/\!\sim$ Bi-Lipschitzäquivalent.

Ein Maß auf $\Sigma/\sim$ erhält man wie folgt: Es bezeichne $\tilde{\kappa}$ die Gleichverteilung auf $\mathfrak{A}$ und $\kappa := \prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\kappa}$ das Bernoulli-Maß auf Σ. Damit gilt insbesondere $\kappa\big([\mathbf{w}]\big) = N^{-d(\mathbf{w})}$ für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.

Die Zylindermengen in $\Sigma/\!\sim$ haben folgende Form: Für $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ sei

$$[\mathbf{w}]_{\Sigma/\sim} := \{\overline{\alpha} \in \Sigma/\!\sim \ \mid \ \text{es existiert ein } \alpha \in \overline{\alpha}, \text{ s.d. } \alpha|_n = \mathbf{w}\}.$$

Man beachte, daß beispielsweise $[123] \cap [121] = \emptyset$, doch $[123]_{\Sigma/\sim} \cap [121]_{\Sigma/\sim} \neq \emptyset$, da unter anderem $\overline{1213^\infty}$ in dieser Schnittmenge enthalten ist. Damit gilt für das Bild κ_Υ von κ unter der Projektionsabbildung $\Upsilon : \Sigma \longrightarrow \Sigma/\!\sim$ nach einer elementaren Rechnung $\kappa_\Upsilon\big(\Upsilon([\mathbf{w}])\big) = \kappa([\mathbf{w}])$. Also ist Υ maßerhaltend.

DENKER & SATO haben in Theorem 2.3 in [10] gezeigt, daß $\pi(\kappa_\Upsilon) = \mu_1$ gilt. Damit läßt sich jede P-harmonische Funktion h auf $\mathcal{W}$ darstellen wie folgt:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{w}) &= \int_{\Sigma/\sim} k\big(\mathbf{w}, \pi(\overline{\alpha})\big)\phi_h(\pi(\overline{\alpha}))\, d\kappa_\Upsilon(\overline{\alpha}) &(3.1)\\ &= \int_\Sigma k\big(\mathbf{w}, \pi\circ\Upsilon(\alpha)\big)\phi_h\big(\pi\circ\Upsilon(\alpha)\big)\, d\kappa(\alpha) \\ &= \int_\Sigma \hat{k}(\mathbf{w},\alpha)\, \hat{\phi}_h(\alpha)\, d\kappa(\alpha), &(3.2) \end{aligned}$$

wobei $\hat{k}(\mathbf{w},\alpha) := k\big(\mathbf{w}, \pi\circ\Upsilon(\alpha)\big)$ und $\hat{\phi}_h(\alpha) := \phi_h\big(\pi\circ\Upsilon(\alpha)\big)$ ist. Mit der in Theorem 3.6 in DENKER & SATO[9] angegebenen expliziten Darstellung des Martinkernes $\hat{k}$ ergibt sich aus (3.2)

$$\begin{aligned} h(\mathbf{w}) \;=\; & \frac{N^{d(\mathbf{w})}}{4}\,\Theta(\mathbf{w})\Big[\int_{[\mathbf{w}^-]} \sum_{k=0}^\infty 2^{-k}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k}) + \\ & + \int_{[(\mathbf{w}^\sharp)^-]} \sum_{k=0}^\infty 2^{-k}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k})\Big]\hat{\phi}_h(\alpha)\, d\kappa(\alpha), \end{aligned}$$

wobei Θ eine Funktion auf $\mathcal{W}$ ist, welche definiert ist durch

$$\Theta(\mathbf{w}) = \begin{cases} 1 & : \quad \mathbf{w} \neq \mathbf{w}^\sharp \\ 2 & : \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}^\sharp. \end{cases}$$

Definition 3.2 *Eine beschränkte und stetige Funktion $\phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonisch, falls für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, $a \neq b \in \mathfrak{A}$ und $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:*

$$\phi\big(\pi(\mathbf{w}ab^\infty)\big) = \frac{1}{2N} \sum_{c \in \mathcal{A}} \Big(\phi\big(\pi(\mathbf{w}ab^n c^\infty)\big) + \phi\big(\pi(\mathbf{w}ba^n c^\infty)\big)\Big).$$

In Denker & Sato[11] wurde gezeigt, daß eine harmonische Funktion ϕ auf $\mathcal{S}$ eindeutig bestimmt ist durch die Werte $h_\phi(\mathbf{w}) = I(\phi)(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W} \setminus \{a^k \,|\, a \in \mathfrak{A}, k \in \mathbb{N}_0\}$. Denn für eine harmonische Funktion ϕ auf $\mathcal{S}$ gilt $\phi\big(\pi(\mathbf{w}\tau(\mathbf{w})^\infty)\big) = h_\phi(\mathbf{w})$. Folglich erhält man eine Martinranddarstellung gemäß

$$\phi\big(\pi(\mathbf{w}\tau(\mathbf{w})^\infty)\big) = h_\phi(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{S}} k(\mathbf{w}, \xi)\phi(\xi)\, d\mu_1(\xi), \tag{3.3}$$

wobei $\mathbf{w} \in \mathcal{W} \setminus \{a^k \,|\, a \in \mathfrak{A}, k \in \mathbb{N}_0\}$ sei. Diese Integraldarstellung hat von daher wahrscheinlichkeitstheoretischen Charakter, als daß der Martinkern alle Informationen über die Markoffkette (insbesondere also auch über die Übergangswahrscheinlichkeiten) enthält. In den anschließenden Abschnitten soll eine alternative, dynamische Integraldarstellung P-harmonischer Funktionen hergeleitet werden. Diese sollte eine Vereinfachung von (3.1) darstellen, da der im allgemeinen Fall höchstens durch relativ hohen Rechenaufwad zu ermittelnde Martinkern nicht länger Bestandteil des Integranden sein wird. Die Dynamik der neuen Darstellung wird gegeben werden durch eine Halbgruppenaktion von $\mathcal{W}^\star$ auf $\Sigma^\star$. Die letztgenannte Menge umfaßt einen Sierpiński-Raum als Teilmenge insofern, als die P-harmonischen Funktionen eine explizite Darstellung über den Rand $\Sigma^\star$ besitzen.

3.5 Die Poissondarstellung harmonischer Funktionen auf einem Sierpiński-Raum

Der vorliegende Abschnitt beinhaltet einen Vergleich der Martinranddarstellung P-harmonischer Funktionen auf $\mathcal{W}$, wie in Abschnitt 3.4 angegeben, und der Poissondarstellung μ-harmonischer Funktionen (vgl. Abschnitt 3.2). Dieser Vergleich wird eine Poissondarstellung P-harmonischer Funktionen über $\Sigma^\star$ liefern.

In Abschnitt 3.2 wurde gezeigt, daß für jede Funktion $\psi \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$ die Funktion $\tilde{h}_\psi : \mathcal{W}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\tilde{h}_\psi(\mathbf{p}) = \int_{\Sigma^\star} \psi(\mathbf{p}\xi)\, d\nu^\star(\xi) = \int_{\Sigma^\star} \psi(\xi)\, d\nu^\star_{\mathbf{p}}(\xi), \;\; \mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star,$$

beschränkt und μ-harmonisch ist, also für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$ der Gleichung

$$\tilde{h}_\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{2N} \sum_{a \in \mathfrak{A}} \big(\tilde{h}_\psi(\mathbf{p}a) + \tilde{h}_\psi(\mathbf{p}a\star)\big)$$

genügt. Für jede P-harmonische Funktion h_ϕ auf $\mathcal{W}$ gilt

$$h_\phi(\mathbf{w}) = \frac{1}{2N} \sum_{a \in \mathfrak{A}} \big(h_\phi(\mathbf{w}a) + h_\phi(\mathbf{w}^\sharp a)\big).$$

Will man nun eine P-harmonische Funktion h_ϕ als Restriktion einer μ-harmonischen Funktion $\tilde{h}_\psi$ darstellen, um über

$$\phi\Big(\pi\big(\mathbf{w}\tau(\mathbf{w})^\infty\big)\Big) = h_\phi(\mathbf{w}) = \tilde{h}_\psi|_{\mathcal{W}}(\mathbf{w}) = \int_{\Sigma^\star} \psi(\mathbf{w}\xi)\, d\nu^\star(\xi)$$

eine verglichen mit (3.3) andere Integraldarstellung harmonischer Funktionen auf $\mathcal{S}$ zu erhalten, bemerkt man sofort folgendes: Falls die Restriktion von $\tilde{h}_\psi$ auf $\mathcal{W}$ P-harmonisch ist, so gilt $\tilde{h}_\psi(\mathbf{w}a\star) = \tilde{h}_\psi(\mathbf{w}^\sharp a)$ für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, $a \in \mathfrak{A}$. Die Funktionswerte von $\tilde{h}_\psi$ auf $\mathcal{W}^\star$ sind also notwendig durch die von $\tilde{h}_\psi$ auf $\mathcal{W}$ bestimmt. Dies motiviert die Einführung einer Abbildung $\Lambda : \Sigma^\star \to \Sigma$ wie folgt: Jedes $\xi = \xi_1\xi_2\ldots \in \Sigma^\star \setminus \Sigma$ hat eine Darstellung $\xi = w_1 \ldots w_n(r\star)\zeta_1\zeta_2\ldots \in \mathcal{A}^n \times \mathcal{A}^\star \times \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, ein $\mathbf{w} = w_1 \ldots w_n \in \mathcal{W}$, ein $r \in \mathcal{A}^\star$ und eine Folge $\zeta = \zeta_1\zeta_2\ldots \in \Sigma^\star$. Zunächst definiert man eine Abbildung $\lambda : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \xi := w_1 \ldots w_n\,(r\star)\,\zeta_1\zeta_2\ldots \in \Sigma^\star \setminus \Sigma \;\; &\Longrightarrow \;\; \lambda(\xi) := (w_1 \ldots w_n)^\sharp\, r\, \zeta_1\zeta_2\ldots\,, \\ \xi \in \Sigma \;\; &\Longrightarrow \;\; \lambda(\xi) := \xi. \end{aligned}$$

Jetzt führt man folgende Abbildung ein:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : \Sigma^\star & \longrightarrow & \Sigma \\ \xi & \longmapsto & \lim_{m\to\infty} \lambda^m(\xi) = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\lambda \circ \ldots \circ \lambda}_{\text{m-mal}}(\xi) \end{array}$$

Nun kann das Hauptresultat dieses Kapitels formuliert werden:

Satz 3.5 *Für eine Funktion $h : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(1) *h ist beschränkt und P-harmonisch.*

(2) *Es existiert eine beschränkte und μ-harmonische Fortsetzung $\tilde{h}$ von h auf $\mathcal{W}^\star$, welche für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ und für alle $a \in \mathfrak{A}$ die Gleichung $h(\mathbf{w}^\sharp a) = \tilde{h}(\mathbf{w}a\star)$ erfüllt.*

(3) *Es existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $\hat{\phi}_h \in L^\infty(\Sigma, \kappa)$, so daß für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ gilt*

$$\begin{aligned} h(\mathbf{w}) =: h_{\hat{\phi}_h}(\mathbf{w}) \quad = \quad & \frac{N^{d(\mathbf{w})}}{4}\,\Theta(\mathbf{w}) \Big[\int_{[\mathbf{w}^-]} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k}) + \\ & + \int_{[(\mathbf{w}^\sharp)^-]} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k}) \Big] \hat{\phi}_h(\alpha)\, d\kappa(\alpha). \end{aligned}$$

(4) *Es existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $\psi_h \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$, welche für alle $\zeta \in \Sigma^\star$ die Gleichung $\psi_h\big(\Lambda(\zeta)\big) = \psi_h(\zeta)$ erfüllt und die Eigenschaft hat, daß für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$*

$$h(\mathbf{w}) = h_\psi(\mathbf{w}) := \int_{\Sigma^\star} \psi_h(\mathbf{w}\xi)\, d\nu^\star(\xi)$$

gilt.

Beweis: Die Äquivalenz von (1) und (3) folgt sofort aus Theorem 3.6 und Theorem 5.6 in Denker & Sato[9].

Zunächst werde jetzt nachgewiesen, daß (4) (2) impliziert. Für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star$ definiere man $\tilde{h}(\mathbf{p}) := \int_{\Sigma^\star} \psi_h(\mathbf{p}\xi)\, d\nu^\star(\xi)$. Dann folgt die μ-Harmonizität von $\tilde{h}$ direkt aus Lemma 1.2 und den Ergebnissen in Abschnitt 3.2.

Man beachte, daß $\psi_h\big(\Lambda(\xi)\big) = \psi_h(\xi)$ die Gleichheit $\psi_h\big(\lambda(\xi)\big) = \psi_h(\xi)$ impliziert. Also gilt

$$\tilde{h}(\mathbf{w}a\star) \quad = \quad \int_{\Sigma^\star} \psi_h(\mathbf{w}a \star \xi)\, d\nu(\xi)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Sigma^\star} \psi_h\big(\lambda(\mathbf{w}a \star \xi)\big)\, d\nu(\xi) \\
&= \int_{\Sigma^\star} \psi_h(\mathbf{w}^\sharp a\xi)\, d\nu(\xi) \\
&= h(\mathbf{w}^\sharp a).
\end{aligned}
$$

Nun werde die Notwendigkeit von (2) für (1) nachgewiesen: Für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ erhält man

$$
\begin{aligned}
h(\mathbf{w}) = \tilde{h}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2N} \sum_{a \in \mathfrak{A}} \big(\tilde{h}(\mathbf{w}a) + \tilde{h}(\mathbf{w}a\star)\big) \\
&= \frac{1}{2N} \sum_{a \in \mathfrak{A}} \big(h(\mathbf{w}a) + h(\mathbf{w}^\sharp a)\big) \\
&= Ph(\mathbf{w}).
\end{aligned}
$$

Schließlich haben wir zu zeigen, daß aus (3) (4) folgt. Dies ist der aufwendigste Teil des Beweises. Zunächst wird dazu folgende Proposition bewiesen:

Proposition 3.6 (a) *Für alle* $\mathbf{w} \in \mathcal{W} \setminus \{\emptyset\}$, *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und für alle* $i_0, \ldots, i_n, j_0, \ldots, j_n \in \mathfrak{A}$ *gilt*

$$
\nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star \,|\, \Lambda(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}(i_0)i_1 \ldots i_n]\,\}\big) = \Theta(\mathbf{w})\, \frac{\Big(\sum_{l=0}^{n} 2^l\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-l})\Big)\, N + 1}{2^{n+2} N^{n+1}}
$$

und

$$
\nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star \,|\, \Lambda(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}^\star(j_0)j_1 \ldots j_n]\,\}\big) = \Theta(\mathbf{w})\, \frac{\Big(\sum_{l=0}^{n} 2^l\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(j_{n-l})\Big)\, N + 1}{2^{n+2} N^{n+1}}.
$$

(b) *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und für alle* $i_0, \ldots, i_n \in \mathfrak{A}$ *gilt*

$$
\nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star \,|\, \Lambda(\xi) \in [i_0 \ldots i_n]\}\big) = \frac{2^{n+1}}{(2N)^{n+1}} = \frac{1}{N^{n+1}}.
$$

Beweis: ad (a) Der Beweis werde durch Induktion über n geführt. Sei

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}' &:= \{\mathbf{w} \in \mathcal{W} \,|\, \mathbf{w} \neq \mathbf{w}^\star\} \\
&= \{\mathbf{w} \in \mathcal{W} \,|\, \mathbf{w} \text{ hat eine Darstellung } \mathbf{u}ab^l, \mathbf{u} \in \mathcal{W}, a, b \in \mathcal{A}, a \neq b, l \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}
$$

IA: Sei $n = 0$ und $\emptyset \neq \mathbf{w}$ beliebig, aber fest.
Es muß gezeigt werden, daß

$$\nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star | \Lambda(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}(i_0)]\}\big) = \begin{cases} \frac{1}{4N} & : \; i_0 \neq \tau(\mathbf{w}),\, \mathbf{w} \in \mathcal{W}' \\ \frac{1}{2N} & : \; i_0 \neq \tau(\mathbf{w}),\, \mathbf{w} \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}' \\ \frac{N+1}{4N} & : \; i_0 = \tau(\mathbf{w}),\, \mathbf{w} \in \mathcal{W}' \\ \frac{N+1}{2N} & : \; i_0 = \tau(\mathbf{w}),\, \mathbf{w} \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}' \end{cases}$$

und

$$\nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star | \Lambda(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}^\star(j_0)]\}\big) = \begin{cases} \frac{1}{4N} & : \; j_0 \neq \tau(\mathbf{w}^\sharp),\, \mathbf{w} \in \mathcal{W}' \\ \frac{1}{2N} & : \; j_0 \neq \tau(\mathbf{w}^\sharp),\, \mathbf{w} \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}' \\ \frac{N+1}{4N} & : \; j_0 = \tau(\mathbf{w}^\sharp),\, \mathbf{w} \in \mathcal{W}' \\ \frac{N+1}{2N} & : \; j_0 = \tau(\mathbf{w}^\sharp),\, \mathbf{w} \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}' \end{cases}$$

ist. Zunächst sei $\mathbf{w} = w_1 \dots w_n \in \mathcal{W}'$, $i_0 \neq \tau(\mathbf{w})$.
Es sei

$$A := \{\xi \in \Sigma^\star \mid \Lambda(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}(i_0)]\}.$$

Weiter sei

$$E := \mathcal{W}^\star \setminus \big\{\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star \mid \tau(\mathbf{p}) \in \{\tau(\mathbf{w}), \tau(\mathbf{w})\star\}\big\}. \tag{3.4}$$

Jedes Element in E hat eine Darstellung $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}k$ für ein $\mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$ und ein $k \in \mathfrak{B} \setminus \{\tau(\mathbf{w}), \tau(\mathbf{w})\star\}$. Nun werden zwei Abbildungen f_1 und f_2 von E nach E definiert wie folgt:
Gilt (i) $k = j \in \mathfrak{A} \setminus \{\tau(\mathbf{w})\}$, so sei $f_1(\mathbf{q}j) := \mathbf{q}\, i_0 \star j \star$
und $f_2(\mathbf{q}j) := \mathbf{q}\, \tau(\mathbf{w}) j$.
Ist (ii) $k = j\star \in \mathfrak{A}^\star \setminus \{\tau(\mathbf{w})\star\}$, so sei $f_1(\mathbf{q}j\star) := \mathbf{q}\, i_0 j\star$
und $f_2(\mathbf{q}j\star) := \mathbf{q}\, \tau(\mathbf{w}) \star j$.
Für alle $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{P}_m := \{1, 2\}^m$ und für $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathcal{P}_m$ sei $f_{\mathbf{s}} := f_{s_m} \circ \dots \circ f_{s_1}$. Nun werde eine Folge $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ disjunkter Mengen in $\Sigma^\star$ definiert wie folgt: Es sei

$$A_1 := \bigcup_{j \in \mathfrak{A} \setminus \{\tau(\mathbf{w})\}} [i_0 j\star]$$

und für alle $m \geq 2$

$$A_m := \bigcup_{j \in \mathfrak{A} \setminus \{\tau(\mathbf{w})\}} \bigcup_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}_{m-1}} [i_0 f_{\mathbf{s}}(j\star)].$$

Da $A_m = \big\{\xi \in \Sigma^\star \mid \lambda^m(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}(i_0)]\big\}$ ist für alle $m \in \mathbb{N}$, gilt $A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ und $\nu^\star(A) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu^\star(A_m)$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\nu^\star(A_1) &= \sum_{j\in\mathfrak{A}\setminus\{\tau(\mathbf{w})\}} \nu^\star([i_0 j\star]) \\
&= \sum_{j\in\mathfrak{A}\setminus\{\tau(\mathbf{w})\}} \left(\frac{1}{2N}\right)^2 \\
&= (N-1)\left(\frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{2N}\,\frac{N-1}{2N}
\end{aligned}$$

und für alle $m \geq 2$

$$\begin{aligned}
\nu^\star(A_m) &= \sum_{j\in\mathfrak{A}\setminus\{\tau(\mathbf{w})\}} \sum_{\mathbf{s}\in\mathcal{P}_{m-1}} \nu^\star\big([i_0 f_{\mathbf{s}}(j\star)]\big) \\
&= \sum_{j\in\mathfrak{A}\setminus\{\tau(\mathbf{w})\}} \sum_{\mathbf{s}\in\mathcal{P}_{m-1}} \frac{1}{2N}\left(\frac{1}{2N}\right)^m \\
&= (N-1)\,2^{m-1}\left(\frac{1}{2N}\right)^{m+1} \\
&= \frac{1}{2N}\left(\frac{1}{N}\right)^{m-1}\frac{N-1}{2N}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\nu^\star(A) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu^\star(A_m) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2N}\left(\frac{1}{N}\right)^{m-1}\frac{N-1}{2N} = \frac{1}{4N}.$$

Nun sei $\mathbf{w} = \mathbf{u}ab^l$ mit $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$, $a, b \in \mathfrak{A}$, $a \neq b$ und $l \in \mathbb{N}$. Es sei

$$B := \{\xi \in \Sigma^\star \mid \Lambda(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}]\}.$$

Die Menge E, die oben definiert wurde $\big($vgl. (3.4)$\big)$, wird jetzt wieder benutzt (man beachte, daß hier $b = \tau(\mathbf{w})$ ist). Jedes $\tilde{\mathbf{q}} \in E$ hat eine Darstellung $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}k$ mit $\mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$ und $k \in \mathfrak{B} \setminus \{b, b\star\}$.

Gilt (i) $k = j \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}$, so sei $g_1(\mathbf{q}j) := \mathbf{q}\,a\star j\star$
und $g_2(\mathbf{q}j) := \mathbf{q}\,bj$.

Ist (ii) $k = j\star \in \mathfrak{A}^\star \setminus \{b\star\}$, so sei $g_1(\mathbf{q}j\star) := \mathbf{q}\,aj\star$
und $g_2(\mathbf{q}j\star) := \mathbf{q}\,b\star j$.

Für alle $\mathbf{s} \in \mathcal{P}_m$ sei $g_{\mathbf{s}}$ nach dem gleichen Muster definiert wie oben $f_{\mathbf{s}}$. Es sei

$$C_1 := \bigcup_{j\in\mathfrak{A}\setminus\{b\}} [a\star j\star]$$

und für alle $m \geq 2$

$$C_m := \bigcup_{j \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}} \bigcup_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}_{m-1}} [a \star g_{\mathbf{s}}(j\star)].$$

Außerdem sei

$$D_1 := \bigcup_{j \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}} [bj]$$

und für alle $m \geq 2$

$$D_m := \bigcup_{j \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}} \bigcup_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}_{m-1}} [bg_{\mathbf{s}}(j)].$$

Schließlich sei für alle $i \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}$

$$E_i := \mathcal{W}^\star \setminus \big\{\mathbf{p} \in \mathcal{W}^\star \mid \tau(\mathbf{p}) \in \{i, i\star\}\big\}.$$

Damit hat jedes $\tilde{\mathbf{q}} \in E_i$ eine Darstellung $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}k$ mit $\mathbf{q} \in \mathcal{W}^\star$ und $k \in \mathfrak{B} \setminus \{i, i\star\}$.
Gilt (i) $k = j \in \mathfrak{A} \setminus \{i\}$, so sei $h_1^i(\mathbf{q}j) := \mathbf{q}\, ij$
und $h_2^i(\mathbf{q}j) := \mathbf{q}\, b \star j\star$.
Ist (ii) $k = j\star \in \mathfrak{A}^\star \setminus \{i\star\}$, so sei $h_1^i(\mathbf{q}j\star) := \mathbf{q}\, bj\star$
und $h_2^i(\mathbf{q}j\star) := \mathbf{q}\, i \star j$.
Für alle $\mathbf{s} \in \mathcal{P}_m$ und für alle $i \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}$ sei $h_{\mathbf{s}}^i$ nach dem gleichen Muster definiert wie oben $f_{\mathbf{s}}$. Es sei für alle $i \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}$

$$F_1^i := \bigcup_{j \in \mathfrak{A} \setminus \{i\}} [ij]$$

und für alle $m \geq 2$

$$F_m^i := \bigcup_{j \in \mathfrak{A} \setminus \{i\}} \bigcup_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}_{m-1}} [ih_{\mathbf{s}}^i(j)].$$

Man überlegt sich leicht, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ die Mengen C_m, D_m, F_m^i, $i \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}$, paarweise disjunkt sind und die Gleichung

$$G_m := C_m \cup D_m \cup \bigcup_{i \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}} F_m^i = \{\xi \in \Sigma^\star \mid \lambda^m(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}]\}$$

erfüllen. Nach Konstruktion ist $\nu^\star(C_m) = \nu^\star(D_m) = \nu^\star(F_m^i) = \nu^\star(A_m)$ für alle $i \in \mathfrak{A} \setminus \{b\}$. Damit gilt

$$\nu^\star(B) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \nu^\star(G_m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} (N+1)\nu^\star(A_m) = \frac{N+1}{4N}.$$

In den Fällen, in denen $\mathbf{w}$ höchstens einen Buchstaben enthält, wird die Behauptung analog bewiesen. Man beachte hierbei, daß für alle $\mathbf{v} = a^m \in \mathcal{W}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathfrak{A}$, nachstehende Gleichung erfüllt ist: $\#\{\mathbf{p} \in \mathcal{W}_m^\star \mid \lambda^m(\mathbf{p}) = \mathbf{v}\} = 2\left(\frac{2N}{N}\right)^m$. Die Formel für $\nu\big(\{\xi \in \Sigma^\star \mid \Lambda(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}^\sharp(j_0)]\}\big)$ folgt direkt aus der Symmetrie des Wortraumes bezüglich der Konjugation.

IV: Angenommen, die Behauptung sei wahr für $n-1$.

IS: Zunächst sei $\mathbf{w} \in \mathcal{W}'$, d.h. $\mathbf{w}$ besitzt eine Darstellung $\mathbf{w} = \mathbf{u}ab^l$, wobei $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$, $a, b \in \mathcal{A}$, $a \neq b$ und $l \in \mathbb{N}$ sei. Dann ist $\Theta(\mathbf{w}) = 1$ und man erhält

$$
\begin{aligned}
& \nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star \mid \Lambda(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}(i_0)i_1 \dots i_n]\}\big) \\
= {} & \nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star \mid \Lambda(\mathbf{u}ab^l\xi) \in [\mathbf{u}ab^{l-1}i_0 i_1 \dots i_n]\}\big) \\
= {} & \nu^\star\big(\{\xi_0\xi_1 \ldots \in \Sigma^\star \mid \Lambda(\mathbf{u}ab^l\xi_0\xi_1 \dots) \in [\mathbf{u}ab^{l-1}i_0 i_1 \dots i_n]\}\big) \\
= {} & \sum_{\xi_0 \in \mathcal{B}} \frac{1}{2N}\, \nu^\star\big(\{\eta = \xi_1\xi_2 \ldots \in \Sigma^\star \mid \Lambda(\mathbf{u}ab^l\xi_0\eta) \in [\mathbf{u}ab^{l-1}i_0 i_1 \dots i_n]\}\big) \\
= {} & \sum_{\xi_0 \in \mathcal{A}} \frac{1}{2N}\, \nu^\star\big(\{\eta \in \Sigma^\star \mid \Lambda(\mathbf{u}ab^l\xi_0\eta) \in [\mathbf{u}ab^{l-1}i_0 i_1 \dots i_n]\}\big) + \\
& + \sum_{\xi_0 \in \mathcal{A}} \frac{1}{2N}\, \nu^\star\big(\{\eta \in \Sigma^\star \mid \Lambda(\mathbf{u}ba^l\xi_0\eta) \in [\mathbf{u}ab^{l-1}i_0 i_1 \dots i_n]\}\big) \\
= {} & \sum_{\xi_0 \in \mathcal{A}} \frac{1}{2N} \Bigg[\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0) \frac{\big(\sum_{k=1}^n 2^{k-1}\, \mathbb{1}_{\xi_0}(i_{n-(k-1)})\big)N + 1}{2^{n+1}N^n} + \\
& + \mathbb{1}_{\xi_0}(i_0)\, \big(1 - \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\big) \frac{\big(\sum_{k=1}^n 2^{k-1}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N + 1}{2^{n+1}N^n} \Bigg] + \\
& + \sum_{\xi_0 \in \mathcal{A}} \frac{1}{2N}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(\xi_0)\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0) \frac{\big(\sum_{k=1}^n 2^{k-1}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N + 1}{2^{n+1}N^n} \\
= {} & \sum_{\xi_0 \in \mathcal{A}} \frac{1}{2N} \Bigg[\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0) \Big[\Big(\sum_{k=1}^n 2^{k-1}\, \mathbb{1}_{\xi_0}(i_{n-(k-1)}) \Big) N + 1 + \\
& + \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(\xi_0) \Big[\Big(\sum_{k=1}^n 2^{k-1}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)}) \Big) N + 1 \Big] \Big] + \\
& + \mathbb{1}_{\xi_0}(i_0)\, \big(1 - \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\big) \Big[\Big(\sum_{k=1}^n 2^{k-1}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)}) \Big) N + 1 \Big] \Bigg] \frac{1}{2^{n+1}N^n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \Bigg[\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\Bigg[\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\xi_0\in\mathcal{A}} 2^{k-1}\cdot \mathbb{1}_{\xi_0}(i_{n-(k-1)})\Big)N + N + \\
& + \sum_{\xi_0\in\mathcal{A}} \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(\xi_0)\Big[\big(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N+1\Big]\Bigg] + \\
& + \sum_{\xi_0\in\mathcal{A}} \mathbb{1}_{\xi_0}(i_0)\big(1-\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\big)\Big[\big(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N+1\Big]\Bigg]\frac{1}{2^{n+2}N^{n+1}} \\
= \; & \Bigg[\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\Big[\big(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\big)N + N + \big(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N+1\Big] + \\
& + \big(1-\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\big)\Big[\big(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N+1\Big]\Bigg]\frac{1}{2^{n+2}N^{n+1}} \\
= \; & \Bigg[\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\Big[(2^n-1)N + N + \big(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N+1\Big] + \\
& + \big(1-\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\big)\Big[\big(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N+1\Big]\Bigg]\frac{1}{2^{n+2}N^{n+1}} \\
= \; & \Bigg[\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\Big[2^nN + \big(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N+1\Big] + \\
& + \big(1-\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_0)\big)\Big[\big(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-(k-1)})\big)N+1\Big]\Bigg]\frac{1}{2^{n+2}N^{n+1}} \\
= \; & \begin{cases} \frac{1}{2^{n+2}N^{n+1}}\Big[\big(\sum_{k=0}^{n} 2^{k}\cdot\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-k})\big)N+1\Big] : \; \tau(\mathbf{w}) = i_0 \\[2ex] \frac{1}{2^{n+2}N^{n+1}}\Big[\big(\sum_{k=0}^{n} 2^{k}\cdot\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-k})\big)N+1\Big] : \; \tau(\mathbf{w}) \neq i_0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Behauptung wird völlig analog bewiesen in dem Fall $\mathbf{w} \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}\,'$, $\mathbf{w} \neq \emptyset$. Die Formel für $\nu^\star\big(\{\xi \in \Sigma^\star \,|\, \Lambda(\mathbf{w}\xi) \in [\mathbf{w}^\sharp(j_0)\dots j_n]\}\big)$ folgt wie oben direkt aus der Symmetrie des Wortraumes $\mathcal{W}$ bezüglich Konjugation.

ad (b) Dies folgt direkt aus der Symmetrie der Worträume $\Sigma^\star$ und Σ. $\diamond$

Nun sind wir in der Lage, die Notwendigkeit von (4) für (3) zu verifizieren:

Zu einer gegebenen Funktion $\hat{\phi}_h \in L^\infty(\Sigma, \kappa)$ auf Σ definiere eine Funktion ψ_h

auf $\Sigma^\star$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi_h : \Sigma^\star &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \xi \quad &\longmapsto \psi_h(\xi) := \hat{\phi}_h\big(\Lambda(\xi)\big). \end{aligned}$$

Dann gilt $\psi_h\big(\Lambda(\zeta)\big) = \psi_h(\zeta)$ für alle $\zeta \in \Sigma^\star$, d.h. ψ_h ist konstant auf allen Mengen der Form $\Lambda^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in \Sigma$.
Zunächst einmal werde angenommen, daß $\hat{\phi}_h$ konstant und nichtnegativ ist auf Mengen der Form $[\mathbf{w}(i_0)i_1 \dots i_n]$ und der Form $[\mathbf{w}^\sharp(j_0)j_1 \dots j_n]$, wobei $i_0, \dots, i_n$ und $j_0, \dots, j_n \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei. Also ist $\hat{\phi}_h$ eine Treppenfunktion zumindest auf $\mathcal{B}(\Sigma^\star) \cap ([\mathbf{w}^-] \cup [(\mathbf{w}^\sharp)^-])$. Für die anschließenden Berechnungen werde folgende Notation eingeführt:
$\mathbf{i} := i_0 i_1 \dots i_n$,
$[\mathbf{w}(\mathbf{i})] := [\mathbf{w}(i_0)i_1 \dots i_n]$,
$\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}(\mathbf{i})\big) := \hat{\phi}_h(\xi)$ für $\xi \in [\mathbf{w}(i_0)i_1 \dots i_n] \subset \Sigma$,
$\mathbf{j} := j_0 j_1 \dots j_n$,
$[\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})] := [\mathbf{w}^\sharp(j_0)j_1 \dots j_n]$,
und
$\hat{\phi}_h(\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})) := \hat{\phi}_h(\zeta)$ für $\zeta \in [\mathbf{w}^\sharp(j_0)j_1 \dots j_n] \subset \Sigma$.
$\sum_{\mathbf{i}}$ bedeute $\sum_{i_0,\dots,i_n \in \mathcal{A}}$ und $\sum_{\mathbf{j}}$ bedeute $\sum_{j_0,\dots,j_n \in \mathcal{A}}$.

Hiermit erhält man

$$\begin{aligned} & h_{\hat{\phi}_h}(\mathbf{w}) = \\ = \; & \int_\Sigma \hat{k}(\mathbf{w},\alpha)\hat{\phi}_h(\alpha)\, d\kappa(\alpha) \\ = \; & \frac{N^{d(\mathbf{w})}}{4}\Theta(\mathbf{w}) \sum_{b=1}^{N} \Bigg[\int_{[\mathbf{w}(b)]} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k}) + \\ & + \int_{[\mathbf{w}^\sharp(b)]} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k}) \Bigg] \hat{\phi}_h(\alpha)\, d\kappa(\alpha) \\ = \; & \frac{N^{d(\mathbf{w})}}{4}\Theta(\mathbf{w}) \Bigg[\sum_{\mathbf{i}} \int_{[\mathbf{w}(\mathbf{i})]} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k}) + \\ & + \sum_{\mathbf{j}} \int_{[\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})]} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\, \mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k}) \Bigg] \hat{\phi}_h(\alpha)\, d\kappa(\alpha) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{N^{d(\mathbf{w})}}{4}\Theta(\mathbf{w})\Big[\sum_{\mathbf{i}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}(\mathbf{i})\big)\Big[\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\int_{[\mathbf{w}(\mathbf{i})]}\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k})\,d\kappa(\alpha)\Big]+\\
&\quad+\sum_{\mathbf{j}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})\big)\Big[\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\int_{[\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})]}\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(\alpha_{d(\mathbf{w})+k})\,d\kappa(\alpha)\Big]\Big]\\
&= \frac{N^{d(\mathbf{w})}}{4}\Theta(\mathbf{w})\Big[\sum_{\mathbf{i}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}(\mathbf{i})\big)\Big[\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{-k}1}{N^{d(\mathbf{w})+n}}\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{N^{d(\mathbf{w})+n+1}}\Big]+\\
&\quad+\sum_{\mathbf{j}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})\big)\Big[\sum_{k=0}^{n}2^{-k}\frac{1}{N^{d(\mathbf{w})+n}}\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(j_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-k}\frac{1}{N^{d(\mathbf{w})+n+1}}\Big]\Big]\\
&= \frac{\Theta(\mathbf{w})}{4}\Big[\sum_{\mathbf{i}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}(\mathbf{i})\big)\Big[\sum_{k=0}^{n}2^{-k}\frac{1}{N^{n}}\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-k}\frac{1}{N^{n+1}}\Big]+\\
&\quad+\sum_{\mathbf{j}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})\big)\Big[\sum_{k=0}^{n}2^{-k}\frac{1}{N^{n}}\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(j_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-k}\frac{1}{N^{n+1}}\Big]\Big]\\
&= \Theta(\mathbf{w})\,\frac{1}{2^2N^{n+1}}\Big[\sum_{\mathbf{i}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}(\mathbf{i})\big)\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n}2^{-k}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_k)\Big)N+2^{-n}\Big]+\\
&\quad+\sum_{\mathbf{j}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})\big)\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n}2^{-k}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(j_k)\Big)N+2^{-n}\Big]\Big]\\
&= \Theta(\mathbf{w})\,\frac{1}{2^{n+2}N^{n+1}}\Big[\sum_{\mathbf{i}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}(\mathbf{i})\big)\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n}2^{n-k}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_k)\Big)N+1\Big]+\\
&\quad+\sum_{\mathbf{j}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})\big)\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n}2^{n-k}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(j_k)\Big)N+1\Big]\Big]\\
&= \Theta(\mathbf{w})\,\frac{1}{2^{n+2}N^{n+1}}\Big[\sum_{\mathbf{i}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}(\mathbf{i})\big)\Big[\Big(\sum_{l=0}^{n}2^{l}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-l})\Big)N+1\Big]+\\
&\quad+\sum_{\mathbf{j}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})\big)\Big[\Big(\sum_{l=0}^{n}2^{l}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(j_{n-l})\Big)N+1\Big]\Big]\\
&= \sum_{\mathbf{i}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}(\mathbf{i})\big)\,\Theta(\mathbf{w})\,\frac{\big(\sum_{l=0}^{n}2^{l}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w})}(i_{n-l})\big)N+1}{2^{n+2}N^{n+1}}+\\
&\quad+\sum_{\mathbf{j}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})\big)\,\Theta(\mathbf{w})\,\frac{\big(\sum_{l=0}^{n}2^{l}\,\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{w}^\sharp)}(j_{n-l})\big)N+1}{2^{n+2}N^{n+1}}\\
&= \sum_{\mathbf{i}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}(\mathbf{i})\big)\nu^\star\big(\{\xi\in\Sigma^\star\mid\Lambda(\mathbf{w}\xi)\in[\mathbf{w}(\mathbf{i})]\}\big)+\\
&\quad+\sum_{\mathbf{j}}\hat{\phi}_h\big(\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})\big)\nu^\star\big(\{\xi\in\Sigma^\star\mid\Lambda(\mathbf{w}\xi)\in[\mathbf{w}^\sharp(\mathbf{j})]\}\big)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Sigma^\star} \psi_h\big(\Lambda(\mathbf{w}\xi)\big)\,d\nu^\star(\xi)\\
&= \int_{\Sigma^\star} \psi_h(\mathbf{w}\xi)\,d\nu^\star(\xi)\\
&= h_{\psi_h}(\mathbf{w}),\ \ \mathbf{w}\in\mathcal{W}.
\end{aligned}$$

Der letzte Übergang von der Summe zum Integral folgt unter Berücksichtigung von Proposition 3.6, welche impliziert, daß $\Lambda(\mathbf{w}\xi)\in[\mathbf{w}^-]\cup[(\mathbf{w}^\sharp)^-]$ gilt für alle $\xi\in\Sigma^\star$ und für alle $\mathbf{w}\in\mathcal{W}$.
Um die Notwendigkeit von (4) für (3) für eine beliebige nichtnegative, beschränkte und meßbare Funktion $\hat{\phi}_h$ zu zeigen, approximiere man $\hat{\phi}_h$ durch eine monoton wachsende Folge $\{\hat{\phi}_h{}^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ von nichtnegativen, beschränkten und meßbaren Funktionen, wobei jedes $\hat{\phi}_h^m$ konstant sei auf Mengen der Form $[\mathbf{w}(i_0)i_1\dots i_n]$ und $[\mathbf{w}^\sharp(j_0)j_1\dots j_n]$ mit $i_0,\dots,i_n,\ j_0,\dots,j_n\in\mathcal{A}$ für irgendein $n=n(m)\in\mathbb{N}_0$. Außerdem setze $\hat{\phi}_h^m = \hat{\phi}_h$ auf $\Sigma\setminus([\mathbf{w}^-]\cup[(\mathbf{w}^\sharp)^-])$. Dann gilt $\hat{\phi}_h(\alpha) = \lim_{m\to\infty}\hat{\phi}_h^m(\alpha)$. (Eine derartige Approximation ist möglich, da $\hat{\phi}_h$ meßbar ist.)

Genauso wie oben werde nun eine $\{\psi_h^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$\psi_h^m(\xi) := \hat{\phi}_h^m\big(\Lambda(\xi)\big),$$

wobei $\xi\in\Sigma^\star$ sei. Dann ist auch ψ_h^m eine monoton wachsende Funktionenfolge und $\lim_{m\to\infty}\psi_h^m(\xi)=\psi_h(\xi)$ für alle $\xi\in\Sigma^\star$.
Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\begin{aligned}
h_{\hat{\phi}_h}(\mathbf{w}) &= \int_{\Sigma}\hat{k}(\mathbf{w},\alpha)\,\hat{\phi}_h(\alpha)\,d\kappa(\alpha)\\
&= \int_{\Sigma}\hat{k}(\mathbf{w},\alpha)\lim_{m\to\infty}\hat{\phi}_h^m(\alpha)\,d\kappa(\alpha)\\
&= \lim_{m\to\infty}\int_{\Sigma}\hat{k}(\mathbf{w},\alpha)\,\hat{\phi}_h^m(\alpha)\,d\kappa(\alpha)\\
&= \lim_{m\to\infty}\int_{\Sigma^\star}\psi_h^m\big(\Lambda(\mathbf{w}\xi)\big)\,d\nu^\star(\xi)\\
&= \int_{\Sigma^\star}\lim_{m\to\infty}\psi_h^m\big(\Lambda(\mathbf{w}\xi)\big)\,d\nu^\star(\xi)\\
&= \int_{\Sigma^\star}\psi_h\big(\Lambda(\mathbf{w}\xi)\big)\,d\nu^\star(\xi)\\
&= \int_{\Sigma^\star}\psi_h(\mathbf{w}\xi)\,d\nu^\star(\xi)
\end{aligned}$$

$$= \quad h_{\psi_h}(\mathbf{w}).$$

Kanonisch verifiziert man die Behauptung für eine beliebige Funktion $\hat{\phi}_h \in L^\infty(\Sigma, \kappa)$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Mit (3.3) folgt nun aus dem vorangegangenen Satz eine Poissondarstellung harmonischer Funktionen auf einem Sierpiński-Raum:

Korollar 3.7 *Ist ϕ eine harmonische Funktion auf $\mathcal{S}$, so existiert eine Funktion $\psi_\phi \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$, so daß für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W} \setminus \{a^k \mid a \in \mathfrak{A}, k \in \mathbb{N}_0\}$ gilt:*

$$\phi\big(\pi(\mathbf{w}\tau(\mathbf{w})^\infty)\big) = \int_{\Sigma^\star} \psi_\phi(\mathbf{w}\xi)\, d\nu^\star(\xi).$$

Tatsächlich ist $\psi_\phi(\zeta) = \phi\big(\pi \circ \Upsilon\big(\Lambda(\zeta)\big)\big)$ für alle $\zeta \in \Sigma^\star$.

Bemerkung 3.3 *Wie man leicht sieht, ist $\Lambda : \Sigma^\star \longrightarrow \Sigma$ eine maßerhaltende Abbildung, d.h. es gilt $\nu^\star\big(\Lambda^{-1}(A)\big) = \kappa(A)$, wobei $A \in \mathcal{B}(\Sigma)$ sei. Die Abbildung Λ zerlegt $\Sigma^\star$ in disjunkte Fasern wie folgt: $\bigcup_{\alpha\in\Sigma} \Lambda^{-1}(\{\alpha\}) = \Sigma^\star$. Bezeichnet man mit $\nu^\star_\alpha$ das bedingte Maß von $\nu^\star$ auf $\Lambda^{-1}(\alpha)$, so gilt für jede Funktion $\psi \in L^\infty(\Sigma^\star, \nu^\star)$*

$$E(\psi \mid \Sigma)(\alpha) = \int_{\Sigma^\star} \psi(\xi)\, d\nu^\star_\alpha(\xi) \;\; \nu\text{-f.s.}$$

Also folgt für eine harmonische Funktion ϕ auf $\mathcal{S}$ aus Korollar 3.7

$$\phi\big(\pi(\mathbf{w}\tau(\mathbf{w})^\infty)\big) = \int_\Sigma \hat{k}(\mathbf{w}, \alpha)\hat{\phi}_h(\alpha)\, d\kappa(\alpha) = \int_\Sigma \int_{\Lambda^{-1}(\alpha)} \psi_\phi(\mathbf{w}\xi)\, d\nu^\star_\alpha(\xi) d\kappa(\alpha).$$

(Man vergleiche FURSTENBERG[19], Kapitel 5, §4.)

Literaturverzeichnis

[1] M.T. Barlow, E.A. Perkins: Brownian motion on the Sierpiński gasket. Probab. Th. Rel. Fields **79** (1988), 543-624.

[2] H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. De Gruyter, Berlin - New York (1968).

[3] H. Bauer: Maß- und Integrationstheorie (2. Aufl.). De Gruyter, Berlin - New York (1992).

[4] A.S. Besicovitch: Sets of fractional dimensions. IV.: On rational approximation to real numbers. J. London Math. Soc. **9** (1934), 126-131.

[5] P. Billingsley: Probability and Measure (2nd ed.). John Wiley & Sons, New York (1986).

[6] F.M. Dekking: Recurrent sets. Adv. in Math. **44** (1982), 78-104.

[7] M. Denker, S. Koch: A poisson formula for harmonic functions on the Sierpiński gasket. Forum Math. **12** (2000), 435-448.

[8] M. Denker, U. Krengel: Wahrscheinlichkeitstheorie. Vorlesungsausarbeitung des Instituts für Mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik der Universität Göttingen, Göttingen (1976).

[9] M. Denker, H. Sato: Sierpiński gasket as a Martin boundary I: Martin kernels. Wird erscheinen in Potential Analysis.

[10] M. Denker, H. Sato: Sierpiński gasket as a Martin boundary II (The Intrinsic Metric). Publ. RIMS, Kyoto Univ. **35** (1999), 769-794.

[11] M. Denker, H. Sato: Reflections on harmonic analysis of the Sierpiński gasket. Preprint.

[12] J.L. Doob: Discrete potential theory and boundaries. J. Math. and Mech. **8** (1959), 433-458.

[13] E.B. Dynkin: Boundary Theory of Markov Processes (the discrete case). Russian Math. Surveys **24** (1969), 1-42.

[14] J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie. Springer Verlag (1996).

[15] K.J. Falconer: The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press, Cambridge - London (1985).

[16] K.J. Falconer: Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, New York (1990).

[17] U. Freiberg, M. Zähle: Harmonic calculus on fractals - A measure geometric approach I. To appear in Potential analysis.

[18] H. Furstenberg: Random walks and discrete subgroups of Lie groups. In: Advances in Probab and Rel. Topics **1**. Ed.: P. Ney, M. Dekker, New York (1971), 1-63.

[19] H. Furstenberg: Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. Princeton University Press, Princeton (1981).

[20] S. Goldstein: Random walks and diffusion on fractals. In: Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems. Ed.: H. Kesten. IMA Math. Appl. **8**, Springer, New York (1987), 121-126.

[21] P.R. Halmos: Measure Theory. Van Nostrand, Princeton - New Jersey - New York (1958).

[22] P.R. Halmos: Lectures on Ergodic Theory. Kenkyusha Printing, Tokyo (1956).

[23] M. Hata: On the structure of self-similar sets. Japan J. Appl. Math. **2** (1985), 381-414.

[24] H. Hering, U. Krengel: Maßtheorie. Vorlesungsausarbeitung des Instituts für Mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik der Universität Göttingen, Göttingen (1980).

[25] J.E. Hutchinson: Fractals and self-similarity. Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713-747.

[26] K. Jacobs: Lecture notes on Ergodic Theory, Part I. Mathematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus (1962/63).

[27] K. Jacobs: Lecture notes on Ergodic Theory, Part II. Mathematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus (1962/63).

[28] V. Jarnik: Diophantische Approximationen und Hausdorff Maß. Mathematicheskii Sbornik **36** (1929), 371-382.

[29] V.A. Kaimanovich, A.M. Versik: Random walks on discrete groups: boundary and entropy. Ann. Probab. **11** (1983), 457-490.

[30] J. Kigami: A Harmonic Calculus on the Sierpiśki Spaces. Japan J. Appl. Math. **6** (1989), 259-290.

[31] J. Kigami: Harmonic Calculus on P.C.F. Self-Similar Sets. Trans. Amer. Math. Soc. 335 (1993), 721-755.

[32] S. Kusuoka: A diffusion process on a fractal. In: Probabilistic methods in mathematical physics, Proc. Taniguchi Int. Symp., Katata and Kyoto 1985. Eds.: K. Ito, N. Ikeda. Kinokuniya-North Holland (1987), 251 -274.

[33] B.B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature. W.H.Freeman, San Francisco (1982).

[34] P. Mattila: Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[35] V. Metz: Potentialtheorie auf dem Sierpiński gasket. Math. Ann. **289** (1991), 207-237.

[36] W. Rinow: Lehrbuch der Topologie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1975).

[37] G.F. Simmons: Introduction to Topology and Modern Analysis. Mc Graw-Hill, New York - San Francisco (1963).

[38] S. Waddington: The Dirichlet problem for Laplacians on post critically finite self-similar fractals. Preprint, Göttingen (1996).

[39] W. Woess: Random walks on infinite graphs and groups - a survey on selected topics. Bull. London Math. Soc. **26** (1994), 1-60.

[40] W. Woess: Random walks on infinite graphs and groups. Cambridge University Press, Cambridge - London (2000).

Vita

19. Dezember 1971	Geboren in Gießen
1978-1982	Wilhelm-Neuhaus-Grundschule in Bad Hersfeld
1982-1984	Förderstufe der Gesamtschule Obersberg in Bad Hersfeld
1984-1988	Gymnasialer Zweig der Gesamtschule Obersberg in Bad Hersfeld
1988-1991	Gymnasiale Oberstufe der Modellschule Obersberg in Bad Hersfeld
Oktober 1991	Beginn des Studiums der Mathematik und der Physik an der Georg-August-Universität in Göttingen
Juni 1993	Zwischenprüfung in Mathematik
Oktober 1993	Zwischenprüfung in Physik
ab Mai 1995	Examensarbeit bei Prof. Dr. M. Denker (Göttingen)
Dezember 1996	Erstes Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in Mathematik und Physik
1991 - 1996	Stipendiatin der Konrad-Adenauer-Stiftung
seit April 1997	Promotionsstudium bei Prof. Dr. M. Denker am Institut für Mathematische Stochastik
Januar 1999 - Mai 1999	Aufenthalt an der University of North Texas (USA)
Oktober 1997 - September 2000	Stipendiatin der Konrad-Adenauer-Stiftung
Mai 2000 - Juni 2000	Wissenschaftliche Angestellte am Institut für Mathematische Stochastik der Universität Göttingen