Charakterisierung der Generatoren dynamischer Halbgruppen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Jörg Rheinländer
aus
Tübingen

Göttingen 1997

Referent: Prof. Dr. H. Hering
Korreferent: Prof. Dr. M. Denker
Tag der mündlichen Prüfung: 19. 06. 1997

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In der algebraischen Formulierung der Quantentheorie werden Observable durch selbstadjungierte Elemente a einer unitalen C^*- bzw. v. Neumann-Algebra $\mathcal{A}$ und physikalische Zustände durch positive, normierte, lineare Funktionale η auf $\mathcal{A}$ beschrieben. Die möglichen Meßwerte von a liegen im Spektrum $\sigma(a)$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Meßwerte in einem Zustand η wird durch $d\eta$, das vom Zustand η auf $\sigma(a)$ induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß, gegeben.

Im Heisenbergbild wird die reversible Dynamik durch eine einparametrige Gruppe von $*$-Automorphismen auf der Algebra beschrieben. Ist diese Gruppe normstetig, hat man zum Beispiel für $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$a(t) = e^{iHt} a e^{-iHt}, \qquad a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Diese Dynamik induziert eine Abbildung auf dem Dualraum der Algebra, in dem die Zustände eingebettet sind. Da bei der Abbildung $a \mapsto a(t)$ die Positivität erhalten bleibt und das Einselement $\mathbb{1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf sich abgebildet wird, bildet die duale Abbildung Zustände auf Zustände ab. Man erhält das sogenannte Schrödingerbild, in dem sich die Zustände und nicht mehr die Observablen zeitlich ändern. Liegen quantenmechanische Systeme zugrunde, die endlich viele Freiheitsgrade haben, so sind nach dem Eindeutigkeitssatz von v. Neumann Heisenberg- und Schrödingerbild äquivalent. In der Quantenfeldtheorie oder der Statistischen Mechanik werden jedoch Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden betrachtet. Das Heisenbergbild ist in diesem Fall allgemeiner als das Schrödingerbild.
Der reversible Charakter der Dynamik wird durch die Gruppenstruktur ausgedrückt. Sollen irreversible, also nicht mehr zeitlich umkehrbare Zeitent-

wicklungen betrachtet werden, geht man zu Halbgruppen über. Aus physikalischen Gründen fordert man, daß diese Halbgruppen positiv sind und das Einselement $\mathbb{1}$ der Algebra auf sich abbilden. Ansonsten bildete die duale Abbildung nicht mehr Zustände auf Zustände ab, und die Wahrscheinlichkeitsinterpretation ginge verloren. Damit sich Erwartungswerte von Observablen stetig in der Zeit ändern, wird gefordert, daß die Halbgruppen gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzen.

In dieser Arbeit sollen Halbgruppen betrachtet werden, die eine irreversible Dynamik erzeugen. Den Untersuchungen liegen folgende Objekte zugrunde:

Sei $\mathcal{A}$ eine v. Neumann- bzw. unitale C^*-Algebra und T_t, $t \geq 0$, eine einparametrige Halbgruppe auf $\mathcal{A}$ mit:
i) T_t ist positiv, das heißt $T_t(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{A}^+$ für alle $t \geq 0$. Dabei ist $\mathcal{A}^+$ der positive Kegel in $\mathcal{A}$.
ii) $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ für alle $t \geq 0$. Halbgruppen, die diese Eigenschaft besitzen, nennt man auch unital.
iii) T_t ist C_0^*- bzw. C_0-Halbgruppe von Kontraktionen.

C_0^*-Halbgruppen sind schwach-$*$-stetige, C_0-Halbgruppen stark stetige Halbgruppen. Daß unterschiedliche Topologien betrachtet werden müssen, resultiert aus der Tatsache, daß eine unitale C^*-Algebra, die Dualraum eines Banachraums ist, $*$-isomorph zu einer v. Neumann-Algebra ist. Deshalb machen schwach-$*$-stetige Halbgruppen auf C^*-Algebren wenig Sinn.

Ist ein System mit Wechselwirkungen vorgegeben, so wird die Dynamik meist durch infinitesimale Zeitänderung der Zustände und Observablen eingeführt. Dies geschieht durch die Angabe des Generators der Halbgruppe. Es ergibt sich hierbei die Frage, welche Eigenschaften sich von der Halbgruppe auf den Generator vererben und umgekehrt. Sind notwendige und hinreichende Kriterien für den Generator der Halbgruppe gefunden, so spricht man von einer Charakterisierung des Generators.
Die Charakterisierung der C_0- bzw. C_0^*-Eigenschaft der Halbgruppe wird durch den bekannten Satz von Hille und Yosida geliefert. Von Interesse sind also noch Charakterisierungen für die Punkte i) und ii) der obigen Halbgruppen. Da diese beiden Eigenschaften voneinander unabhängig sind, hat man versucht, unabhängige Charakterisierungen anzugeben. Der interessantere Punkt ist die Positivität. Ergebnisse in dieser Richtung wurden von Evans und Hanche-Olsen in [Eva79] erzielt. Sie betrachten allerdings lediglich norm-

stetige Halbgruppen, also insbesondere nur beschränkte Generatoren. Dieses Resultat konnte von Bratteli und Robinson [Bra81b] auf C_0-Halbgruppen auf C^*-Algebren erweitert werden. Der Nachteil dieser Charakterisierung ist, daß die Positivität der Halbgruppe nicht direkt auf Eigenschaften des Generators übertragen werden konnte, sondern nur zum Beispiel auf Eigenschaften der Resolvente.

Weitergehende Ergebnisse konnten im normstetigen Fall unter der zusätzlichen Voraussetzung der vollständigen Positivität der Halbgruppe erzielt werden. Vollständige Positivität bedeutet, daß T_t nicht nur auf $\mathcal{A}$ positiv ist, sondern daß auch die durch $T_t^{(n)}[x_{ij}] = [T_t(x_{ij})]$ auf der Algebra $\mathcal{M}(n, \mathcal{A})$ der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathcal{A}$ gegebene Abbildung für alle $n \in \mathbb{N}$ positiv ist. Vollständig positive Abbildungen sind aufgrund eines Resultates von Stinespring einfach zu behandeln.
Die Betrachtung dieser Zusatzvoraussetzung wird durch physikalische Argumente gerechtfertigt, allerdings stimmen nicht alle Autoren dieser Rechtfertigung zu. Auf diese Diskussion wird genauer in Kapitel 6 eingegangen.
Unter den Voraussetzungen der Normstetigkeit und der vollständigen Positivität konnte eine explizite Form des Generators auf der v. Neumann-Algebra bzw. auf der dargestellten C^*-Algebra angegeben werden. Ob solch eine explizite Angabe des Generators, auch Darstellung des Generators genannt, im nicht-normstetigen Fall gelingen kann, ist zweifelhaft. Bei den einparametrigen $*$-Automorphismengruppen gibt es im normstetigen Fall Darstellungen des Generators, nicht aber im allgemeinen Fall. Diese Gruppen sind Spezialfälle der unitalen, vollständig positiven Halbgruppen.

In dieser Arbeit wird folgende, in der Anwendung einfach nachzuweisende, direkte Charakterisierung der Generatoren positiver, unitaler C_0^*-Halbgruppen auf v. Neumann-Algebren bzw. C_0-Halbgruppen auf C^*-Algebren bewiesen:

Sei T_t eine C_0^*- bzw. C_0-Halbgruppe auf der v. Neumann- bzw. C^*-Algebra $\mathcal{A}$ mit Generator A. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:
i) T_t ist positiv und unital für alle $t \geq 0$.
ii) $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$ und A ist symmetrisch, das heißt $A(x)^* = A(x^*)$ $\forall x \in D(A)$. $D(A)$ ist der Definitionsbereich von A.

An dieses Ergebnis schließen wir eine Untersuchung über vollständig positive, unitale Halbgruppen an. Es zeigt sich, daß die unter ii) angegebenen Bedingungen auf die Matrizenalgebren übertragen werden können. Als Resultat erhalten wir die oben angegebene Charakterisierung, wobei die Forderung 'T_t ist positiv' durch 'T_t ist vollständig positiv' ersetzt worden ist.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

In Kapitel 2 werden die Begriffe und Ergebnisse aus der Theorie der Halbgruppen und der Theorie der Operatoralgebren, auf die im Verlauf der Arbeit zurückgegriffen wird, eingeführt.

In Kapitel 3 wird anhand der algebraischen Formulierung der Quantentheorie motiviert, warum man positive, unitale Halbgruppen betrachtet. Als Algebra, in die die Observablen eingebettet sind, wird der Übersichtlichkeit halber die spezielle v. Neumann-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der beschränkten Operatoren auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ betrachtet. Ausgehend von Betrachtungen im Schrödingerbild wird hergeleitet, daß eine nicht notwendig reversible Dynamik durch eine unitale, positive Halbgruppe gegeben ist. Anschließend wird auf den irreversiblen Charakter der Dynamik eingegangen.

Im ersten Abschnitt des vierten Kapitels wird die oben genannte Charakterisierung der Generatoren positiver, unitaler C_0-Halbgruppen auf C^*-Algebren bewiesen. Dazu zeigen wir zuerst, daß die Generatoren A dieser Halbgruppen symmetrisch sind und daß $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$ gilt. Anschließend wird hergeleitet, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, um eine unitale, positive Halbgruppe zu erzeugen. Es schließen sich Untersuchungen über den Definitionsbereich des Generators an.
Im zweiten Abschnitt wird anstelle der Positivität der Halbgruppe die vollständige Positivität gesetzt. Da sich die Symmetrie des Generators A und die Bedingung $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$ auf den Generator $A^{(n)}$, der auf der Matrizenalgebra $\mathcal{M}(n, \mathcal{A})$ operiert, geeignet übertragen lassen, können wir eine Charakterisierung für Generatoren vollständig positiver, unitaler Halbgruppen angeben.

Im fünften Kapitel werden anstelle der C^*-Algebren, wie im vierten Kapitel, v. Neumann-Algebren betrachtet. Die daraus resultierenden Änderungen liegen in der Schwach-$*$-Stetigkeit der Halbgruppe. Wir können eine zum C^*-Algebren-Fall analoge Charakterisierung angeben. Allerdings werden die notwendigen Bedingungen an den Generator auf eine andere Art bewiesen als im vierten Kapitel. Der Beweis ist etwas länger, aber die darin eingeführte Methode, um die Positivität der Halbgruppe auf Eigenschaften des

Generators zu übertragen, kann eventuell auch für die Bearbeitung anderer Fragestellungen in diesem Gebiet verwendet werden. Im Anschluß an diesen Satz werden weitere Resultate analog zum vierten Kapitel bewiesen. Auch für vollständig positive, unitale Halbgruppen kann eine Charakterisierung bewiesen werden.

In Kapitel 6 werden die Ergebnisse anderer Autoren vorgestellt und mit unseren verglichen.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. H. Hering für die fruchtbaren Diskussionen bedanken und für das Vertrauen, das er mir entgegengebracht hat.
Ich möchte mich bei Herrn Prof. M. Denker für die Übernahme des Korreferates bedanken.
Weiterhin danke ich allen, die mir bei der Erstellung der Arbeit geholfen haben, besonders Anja, Olaf, Susi und Wolfgang. Und natürlich auch bei Brice, Paul, Peter und Stefan-M.

Kapitel 2

Vorbereitungen

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Ergebnisse aus der Theorie der Operatoralgebren und der Theorie der einparametrigen Halbgruppen bereitgestellt werden, auf die in späteren Kapiteln zurückgegriffen werden muß. Definierte Begriffe werden durch *kursive* Schrift hervorgehoben, Ergebnisse als Sätze formuliert. Die meisten Resultate sind den Kapiteln 2 und 3 des Buches von Bratteli und Robinson [Bra87] entnommen, weswegen auf einen Literaturverweis verzichtet wird. Bei Ergebnissen aus anderen Quellen wird auf das Literaturverzeichnis verwiesen.

2.1 Operatoralgebren

2.1.1 C^*-Algebren

Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra. Eine Abbildung $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto x^*$, heißt *Involution*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
i) $(x^*)^* = x$,
ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$,
iii) $(xy)^* = y^* x^*$,
iv) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Eine Algebra mit Involution heißt *$*$-Algebra.* Eine Banach-$*$-Algebra $\mathcal{A}$ heißt *C^*-Algebra*, falls $\|x^* x\| = \|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt.

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei C^*-Algebren. Eine Abbildung Φ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ heißt *$*$-Homomorphismus*, falls gilt
i) $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$,

ii) $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$.

Einen bijektiven $*$-Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ nennt man *$*$-Isomorphismus*, gilt $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, so spricht man von einem *$*$-Automorphismus*.

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Einselement $\mathbb{1}$, dann heißt $\mathcal{A}$ *unital*. Die *Resolventenmenge* $\rho(a)$ eines Elementes $a \in \mathcal{A}$ ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß $\lambda\mathbb{1} - a$ invertierbar ist. Das *Spektrum* $\sigma(a)$ von a ist das Komplement von $\rho(a)$ in $\mathbb{C}$.

Ein Element $x \in \mathcal{A}$ heißt *selbstadjungiert*, falls $x^* = x$ gilt. Jedes Element x hat eine eindeutige Zerlegung in zwei selbstadjungierte Elemente der Form $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 = (x + x^*)/2$ und $x_2 = (x - x^*)/2i$.

Satz 2.1 *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra. Für $a \in \mathcal{A}$ gilt:*
i) $\sigma(\lambda\mathbb{1} - a) = \lambda - \sigma(a)$,
ii) $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$,
iii) $\sigma(P(a)) = P(\sigma(a))$, P ein Polynom,
iv) $\sigma(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|]$, falls a selbstadjungiert ist.

Ein selbstadjungiertes Element $x \in \mathcal{A}$ heißt *positiv*, falls $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$ gilt. Die Menge aller positiven Elemente von $\mathcal{A}$ wird mit $\mathcal{A}^+$ bezeichnet.
Die *Quadratwurzel* $a^{1/2}$ aus einem positiven Element $a \in \mathcal{A}$ ist definiert als das eindeutige positive Element $b \in \mathcal{A}^+$ mit $b^2 = a$. Ist $x \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert, so wird der *Betrag* $|x|$ von x durch $(x^2)^{1/2}$ definiert.

Satz 2.2 *Die Menge $\mathcal{A}^+$ ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit der Eigenschaft $\mathcal{A}^+ \cap (-\mathcal{A}^+) = \{0\}$.*
Jedes selbstadjungierte Element a kann eindeutig in zwei positive Elemente $a = a^+ - a^-$ zerlegt werden. Es gilt $a^\pm = (|a| \pm a)/2$.

Man kann folgende Charakterisierung für positive Elemente beweisen:

Satz 2.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $a \in \mathcal{A}$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*
i) a ist positiv,
ii) $a = b^*b$ für ein $b \in \mathcal{A}$.

Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine lineare Abbildung. Φ heißt *positiv*, falls $\Phi(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{A}^+$ gilt.

Bezeichne mit $\mathcal{M}(n, \mathcal{A})$ die Algebra der $n \times n$-Matrizen $[a_{ij}]$ mit Einträgen a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, aus $\mathcal{A}$.

Satz 2.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. Dann existiert eine eindeutige Norm, so daß $\mathcal{M}(n, \mathcal{A})$ eine C^*-Algebra ist. Es gilt die Ungleichung*

$$\|a_{ij}\| \leq \|[a_{ij}]\| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\| \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Beweis : In [Tak79], IV.3. □

Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine lineare Abbildung. Durch $\Phi^{(n)}[a_{ij}] := [\Phi(a_{ij})]$ wird eine Abbildung $\Phi^{(n)} : \mathcal{M}(n, \mathcal{A}) \to \mathcal{M}(n, \mathcal{A})$ definiert. Eine positive Abbildung $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt *vollständig positiv*, falls $\Phi^{(n)}$ für alle $n \in I\!N$ positiv ist.

Ein lineares Funktional η auf einer C^*-Algebra heißt *positiv*, falls $\eta(x^*x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt. Ein positives lineares Funktional η mit $\|\eta\| = 1$ heißt *Zustand*.

Eine *Darstellung einer C^*-Algebra* $\mathcal{A}$ ist ein Paar $(\mathcal{H}, \pi)$, wobei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und π ein $*$-Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, der C^*-Algebra der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum, ist.

Satz 2.5 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. Dann ist $\mathcal{A}$ $*$-isomorph zu einer normabgeschlossenen $*$-Unteralgebra einer Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ beschränkter Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$.*

2.1.2 Von Neumann-Algebren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Algebra der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$. Außer der Normtopologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sind für uns noch die folgendermaßen gegebenen Topologien wichtig:

Die *starke Operatortopologie.* Sei $\psi \in \mathcal{H}$. Durch die Abbildung $a \mapsto \|a(\psi)\|$ wird eine Halbnorm auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiert. Die Menge aller solcher Halbnormen

$\{\|a(\psi)\| : \psi \in \mathcal{H}\}$ definiert eine lokalkonvexe Hausdorffsche Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, die starke Operatortopologie genannt wird.

Die *schwache Operatortopologie.* Für jedes Paar $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ wird durch die Abbildung $a \mapsto |(a(\psi), \phi)|$ eine Halbnorm auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiert. Die Menge aller solcher Halbnormen $\{|(a(\psi), \phi)| : \psi, \phi \in \mathcal{H}\}$ definiert eine lokalkonvexe Hausdorffsche Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, genannt schwache Operatortopologie.

Die *σ-schwache Topologie.* Die σ-schwache Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Hausdorffsche Topologie, die durch die Halbnormen $a \mapsto |Tr(a\rho)|$ gegeben ist, wobei $\rho \in L^1(\mathcal{H})$, dem Banachraum der Spurklasseoperatoren auf $\mathcal{H}$, ist. Da der Dualraum von $L^1(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ identifiziert werden kann, heißt diese Topologie auch *Schwach-$*$-Topologie.*

Eine *v. Neumann-Algebra* ist eine in der schwachen Operatortopologie abgeschlossene $*$-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, die den Einheitsoperator $\mathbb{1}$ enthält.

Sei $\mathcal{N}$ eine Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Die *Kommutante* $\mathcal{N}'$ ist die Menge aller beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$, die mit allen Elementen aus $\mathcal{N}$ kommutieren.

Als *Prädualraum* $\mathcal{N}_*$ einer v. Neumann-Algebra $\mathcal{N}$ bezeichnet man den Raum aller σ-schwach stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{N}$. Die Bezeichnung wird gewählt, da der Dualraum von $\mathcal{N}_*$ gerade mit $\mathcal{N}$ identifiziert wird.

Satz 2.6 *(Sakai) Eine C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist genau dann $*$-isomorph zu einer v. Neumann-Algebra, wenn $\mathcal{A}$ Dualraum eines Banachraums ist.*

Sei $\mathcal{N}$ eine Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{G}$ Teilmenge von $\mathcal{H}$. Mit $[\mathcal{N}\mathcal{G}]$ wird der Abschluß der linearen Hülle von Elementen der Form $a(\psi)$ mit $a \in \mathcal{N}$ und $\psi \in \mathcal{G}$ bezeichnet. Man sagt, eine $*$-Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist *nichtentartet*, falls $[\mathcal{A}\mathcal{H}] = \mathcal{H}$ gilt.

Satz 2.7 *(v. Neumann) Sei $\mathcal{N}$ eine nichtentartete $*$-Algebra von Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
i) $\mathcal{N} = \mathcal{N}''$,
ii) $\mathcal{N}$ ist in der starken Operatortopologie abgeschlossen,
iii) $\mathcal{N}$ ist in der schwachen Operatortopologie abgeschlossen,
iv) $\mathcal{N}$ ist in der σ-schwachen Operatortopologie abgeschlossen.

Satz 2.8 *Sei $\mathcal{N}$ eine v. Neumann-Algebra und $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum mit dim($\mathcal{K}$) $= n$. Dann ist $\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ unitär äquivalent zu $\mathcal{M}(n, \mathcal{N})$.*

Beweis : In [Kad86], 11.2.2. □

Satz 2.9 *(Stinespring) Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine lineare Abbildung. Φ ist genau dann vollständig positiv, wenn Φ die Form*

$$\Phi(x) = V^* \pi(x) V$$

mit einer Darstellung π von $\mathcal{A}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{K}$ und einer beschränkten linearen Abbildung $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ hat. Ist $\mathcal{A}$ eine v. Neumann-Algebra und Φ σ-schwach stetig, so kann auch π σ-schwach stetig gewählt werden.

Beweis : In [Sti55]. □

2.2 Halbgruppen auf Banachräumen

Wir betrachten einen Banachraum X und eine norm-abgeschlossene Teilmenge F des Dualraumes X^* von X, so daß entweder $F = X^*$ oder $X = F^*$ gilt. Im letzten Fall schreiben wir $F = X_*$. Mit $\sigma(X, F)$ werde die lokalkonvexe Topologie auf X bezeichnet, die durch die Funktionale aus F induziert wird. $\sigma(X, X^*)$ ist also die schwache Topologie auf X und $\sigma(X, X_*)$ die Schwach-$*$-Topologie.

Eine einparametrige Familie $T_t : X \to X$, $t \geq 0$, von beschränkten linearen Abbildungen auf dem Banachraum X heißt *Halbgruppe von beschränkten linearen Abbildungen auf* X, falls gilt:
i) $T_{s+t} = T_s T_t$ für $t, s \geq 0$,
ii) $T_0 = 1$, wobei 1 die Identitätsabbildung auf X ist.
Statt 'Halbgruppe von beschränkten Operatoren' schreiben wir auch kurz 'Halbgruppe'.

Eine Halbgruppe T_t, $t \geq 0$, auf einem Banachraum X heißt $\sigma(X, F)$-*stetige Halbgruppe*, falls gilt:
i) $t \mapsto T_t(x)$ ist $\sigma(X, F)$-stetig für alle $x \in X$,
ii) $x \mapsto T_t(x)$ ist $\sigma(X, F) - \sigma(X, F)$-stetig für alle $t \geq 0$.
Man bezeichnet die $\sigma(X, X^*)$-stetigen Halbgruppen auch als C_0-Halbgruppen

und die $\sigma(X, X_*)$-stetigen Halbgruppen als C_0^*-Halbgruppen.

Satz 2.10 *Sei T_t eine $\sigma(X, F)$-stetige Halbgruppe auf X. Dann existieren Konstanten $M \geq 1$ und $\beta \geq \inf_{t>0}(t^{-1} \log \|T_t\|)$, so daß $\|T_t\| \leq Me^{\beta t}$ gilt.*

Satz 2.11 *Sei T_t eine $\sigma(X, F)$-stetige Halbgruppe auf X, so daß $\|T_t\| \leq Me^{\beta t}$ gilt. Sei μ ein komplexes Maß auf $I\!R^+$, so daß $\int_0^\infty d|\mu|(t)e^{\beta t} < \infty$ gilt. Dann existiert zu jedem $x \in X$ ein $y \in X$, so daß*

$$\eta(y) = \int_0^\infty \eta(T_t(x))d\mu(t) \qquad \forall \eta \in F$$

gilt.

Wenn x und y wie im letzten Satz gegeben sind, schreibt man auch

$$y = \int_0^\infty T_t(x)d\mu(t).$$

Der *(infinitesimale) Generator* einer $\sigma(X, F)$-stetigen Halbgruppe ist die lineare Abbildung A auf X, deren Definitionsbereich $D(A)$ aus den Elementen $x \in X$ besteht, für die ein $y \in X$ existiert, so daß

$$\eta(y) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \eta(T_t(x) - x)$$

für alle $\eta \in F$ gilt. Falls $x \in D(A)$ ist, so definiert man $A(x) := y$.

Satz 2.12 *Sei T_t eine $\sigma(X, F)$-stetige Halbgruppe auf dem Banachraum X, A der Generator von T_t und M, β Konstanten, so daß $\|T_t\| \leq Me^{\beta t}$ gilt. Dann ist A $\sigma(X, F)$-dicht definiert und $\sigma(X, F) - \sigma(X, F)$-abgeschlossen. Ist $\Re e\lambda > \beta$, dann ist Range$(\lambda 1 - A) = X$ und für $x \in D(A)$ gilt*

$$\|(\lambda 1 - A)(x)\| \geq M^{-1}(\Re e\lambda - \beta)\|x\|.$$

Die Resolvente von A ist durch die Laplace-Transformation

$$(\lambda 1 - A)^{-1}(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t(x)dt$$

für alle $x \in X$ und $\Re e\lambda > 0$ gegeben.

Satz und Definition 2.13 *Jede C_0-Halbgruppe ist stark stetig. Der durch den schwachen Limes definierte Generator stimmt mit dem* starken Generator

$$\tilde{A}(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t(x) - x)$$

für $x \in D(\tilde{A}) := \{x \in X : \exists \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t(x) - x)\}$ überein. Die Grenzwerte werden dabei in der Banachraumnorm genommen.

Satz 2.14 *Sei T_t eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A. Sei weiterhin $C_0^\infty((0,\infty), I\!R)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger in $(0,\infty)$ und Wertebereich $I\!R$. Dann ist die Menge*

$$E := span\{y \in X : \exists \phi \in C_0^\infty((0,\infty), I\!R), x \in X, s.d. \;\; y = \int_0^\infty \phi(s) T_s(x) ds\}$$

Teilmenge von $\cap_{k \in I\!N} D(A^k)$ und liegt norm-dicht in X.
Sei $y = \int_0^\infty \phi(s) T_s(x) ds \in E$, dann gilt

$$A^k(y) = \begin{cases} 0 & : \quad T_s(x) = const. \quad \forall \quad s \geq 0, \\ (-1)^k \int_0^\infty \phi^{(k)}(s) T_s(x) ds & : \quad sonst. \end{cases}$$

Beweis : In [Paz83], 1.2.7. □

Der Satz existiert in der Literatur nur für C_0-Halbgruppen. In Kapitel 5 werden wir eine analoge Aussage für C_0^*-Halbgruppen beweisen. In der oben definierten Menge E kann $C_0^\infty((0,\infty), I\!R)$ durch $C_0^\infty((0,\infty), I\!R^+)$ ersetzt werden, siehe Bemerkung 5.2. Wir benutzen in dieser Arbeit die Notation $I\!R^+ := [0, \infty)$.

Satz 2.15 *(Hille-Yosida) Sei eine lineare Abbildung A mit Definitionsbereich $D(A)$ auf einem Banachraum X gegeben. Die folgenden beiden Bedingungen sind äquivalent:*
i) A ist der Generator einer $\sigma(X,F)$-stetigen Halbgruppe von Kontraktionen T_t auf X.
ii) A ist $\sigma(X,F)$-dicht definiert und $\sigma(X,F) - \sigma(X,F)$-abgeschlossen. Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\|(1 - \alpha A)(x)\| \geq \|x\|, \qquad x \in D(A),$$

und für $\lambda > 0$ gilt

$$Range(1 - \lambda A) = X.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann kann die Halbgruppe T_t durch die folgende Exponentialformel berechnet werden:

$$T_t(x) = \lim_{n\to\infty}(1 - tA/n)^{-n}(x).$$

Der Limes existiert in der $\sigma(X, F)$-Topologie, für C_0-Halbgruppen kann auch der starke Limes genommen werden.

Kapitel 3

Motivation

In diesem Kapitel soll physikalisch motiviert werden, warum man sich für positive, unitale Halbgruppen auf C^*- und v. Neumann-Algebren interessiert. Wir beschränken uns in dieser Motivation auf den einfachen Fall und betrachten $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, die Algebra der beschränkten Operatoren auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Als Observablen können die selbstadjungierten Elemente aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ angesehen werden. Der Raum, in dem die Zustände eingebettet sind, ist dann der Banachraum aller Spurklasseoperatoren $L^1(\mathcal{H})$ auf $\mathcal{H}$. Die Diskussion lehnt sich an eine Arbeit von Ingarden und Kossakowski [Ing75] aus dem Jahr 1975 an. Allerdings wird in [Ing75] als Raum, in dem die Zustände liegen, der reelle Banachraum aller selbstadjungierten Spurklasseoperatoren auf $\mathcal{H}$ genommen. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß der reelle Banachraum aller selbstadjungierten Spurklasseoperatoren der kleinste lineare Raum ist, in den die Menge aller Zustände eingebettet werden kann. Der Nachteil hingegen ist, daß diese Vorgehensweise nicht in den C^*- beziehungsweise in den v. Neumann-Algebren-Formalismus paßt, denn in diesen werden immer komplexe Algebren und ihre Dual- und Prädualräume betrachtet.

Positive, unitale Halbgruppen kommen typischerweise in der irreversiblen Thermodynamik vor.
Als irreversibel werden Dynamiken bezeichnet, bei denen die Entropie zeitlich nicht konstant bleibt. Irreversibles Verhalten zeigen zum Beispiel offene Systeme S. Dabei bezeichnet man ein System als offen, wenn es mit einem äußeren System R - das kann ein Wärmebad oder ein Meßinstrument sein - wechselwirkt. Könnte man einen Hamiltonoperator für das ganze System S+R finden, so hätte man wieder eine Hamiltondynamik. Die Angabe des

Hamiltonoperators ist aber in fast allen realistischen Situationen wegen der Komplexität der Wechselwirkungen nicht möglich.

Die einfachste Dynamik, die bisher mathematisch behandelt werden kann und die ein irreversibles Verhalten für das Teilsystem S des gesamten Systems S+R beschreibt, wird durch eine Halbgruppe von Transformationen gegeben. Dadurch ist die Zeitrichtung vorgegeben, in der sich der Prozeß entwickelt. Es ist allerdings nicht einfach, plausible physikalische Bedingungen für das gesamte System S+R anzugeben, die mathematisch streng eine Halbgruppendynamik für das Teilsystem S implementieren. Eine mathematisch strenge Behandlung konnte zum Beispiel von Davies für einen harmonischen Oszillator [Dav73] und für ein N-Level-System [Dav74], von Pule [Pul74] für ein Spin-$\frac{1}{2}$-System ausgeführt werden. Diese Systeme waren dabei immer an ein unendliches Wärmebad gekoppelt.

Die minimalen physikalischen Forderungen an solch eine Halbgruppendynamik im Schrödingerbild sind, daß Zustände $\mathcal{S} = \{\rho \in L^1(\mathcal{H}) : \rho \geq 0, Tr(\rho) = 1\}$ auf Zustände abgebildet werden. Daher wird für eine dynamische Halbgruppe T_t^* folgendes gefordet:

Grundannahmen für dynamische Halbgruppen im Schrödingerbild:
1. Gilt $Tr(\rho) = 1$ für $\rho \in L^1(\mathcal{H})$, dann auch $Tr(T_t^*(\rho)) = 1$.
2. Für $\rho \geq 0$ ist auch $T_t^*(\rho) \geq 0$.
3. T_t^* ist schwach stetig .

Die letzte Eigenschaft resultiert aus der Forderung, daß sich Erwartungswerte von Observablen stetig mit der Zeit ändern sollen. Die Observablen sind die selbstadjungierten Elemente aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, dem Dualraum von $L^1(\mathcal{H})$, deshalb wird hier die schwache Stetigkeit gefordert.

Im Fall quantenmechanischer Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden sind Schrödinger- und Heisenbergbild nach dem Eindeutigkeitssatz von v. Neumann zueinander äquivalent. Dies gilt nicht mehr, wenn unendlich viele Freiheitsgrade vorliegen. Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden treten typischerweise beim thermodynamischen Limes in der Statistischen Mechanik oder in der Quantenfeldtheorie auf. Aus diesem Grund werden die eben formulierten Axiome für dynamische Halbgruppen auf das Heisenbergbild übertragen, das heißt, man geht zur dualen Halbgruppe $T_t : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$

über:

$$Tr(\rho T_t(a)) := Tr(T_t^*(\rho)a)$$

für $\rho \in L^1(\mathcal{H})$ und $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Jedes Element $\mu \in L^1(\mathcal{H})$ kann durch $\tilde{\mu} := \frac{\mu}{\|\mu\|_{L^1(\mathcal{H})}}$ normiert werden. Deshalb folgt aus der ersten Eigenschaft einer dynamischen Halbgruppe im Schrödingerbild die Spurerhaltung:

$$Tr(T_t^*(\mu)) = \|\mu\|_{L^1(\mathcal{H})} Tr(T_t^*(\tilde{\mu})) = \|\mu\|_{L^1(\mathcal{H})} Tr(\tilde{\mu}) = Tr(\mu)$$

für alle Elemente aus $L^1(\mathcal{H})$ und damit

$$Tr(\rho T_t(\mathbb{1})) = Tr(T_t^*(\rho)) = Tr(\rho) \qquad \forall \rho \in L^1(\mathcal{H}).$$

Sei $g \in \mathcal{H}$ und der Operator $\mu_{g,\psi_n} \in L^1(\mathcal{H})$ durch $\mu_{g,\psi_n}(h) = (g,h)\psi_n$ für alle $h \in \mathcal{H}$ definiert, dabei sei$\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann ist $Tr(\mu_{g,\psi_n}) = (g, \psi_n)$ und

$$Tr(\mu_{g,\psi_n} T_t(\mathbb{1})) = \sum_{i\in\mathbb{N}} (\psi_i, (g, T_t(\mathbb{1})\psi_i)\psi_n) = (g, T_t(\mathbb{1})\psi_n),$$

also $(g, T_t(\mathbb{1})\psi_n) = (g, \psi_n)$. Diese Rechnung kann für alle $g \in \mathcal{H}$ durchgeführt werden. Man bekommt auf diese Weise aus der ersten Forderung an die Dynamik im Schrödingerbild die Eigenschaft $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ für alle $t \geq 0$ im Heisenbergbild.

Für die Übertragung der zweiten Eigenschaft auf das Heisenbergbild benötigt man das folgende Ergebnis:

Lemma 3.1 *Sei $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. a ist genau dann positiv, wenn für alle $\rho \geq 0$ gilt: $Tr(\rho a) \geq 0$.*

Beweis : i) Sei $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ und $\rho \in L^1(\mathcal{H})^+$ beliebig. Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$, so daß $\rho\psi_n = \lambda_n\psi_n$, mit $\lambda_n > 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Spur invariant unter Basiswechsel ist, erhält man

$$\begin{aligned} Tr(\rho a) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\psi_n, a\rho\psi_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (\psi_n, a\psi_n) \geq 0. \end{aligned}$$

ii) Sei $\psi \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann existiert ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß $\phi_1 = \frac{\psi}{\|\psi\|}$ gilt. Der Operator $\rho := (\phi_1, \cdot)\phi_1$ ist Element der Spurklasse $L^1(\mathcal{H})$ und positiv, denn es gilt für beliebiges $\eta \in \mathcal{H}$ mit Entwicklung $\eta = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} c_n\phi_n$

$$\begin{aligned}(\eta, \rho\eta) &= (\sum_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} c_k\phi_k, (\phi_1, \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} c_n\phi_n)\phi_1) \\ &= c_1(\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} c_n\phi_n, \phi_1) \\ &= c_1\overline{c_1} \geq 0.\end{aligned}$$

Deswegen erhält man

$$0 \leq Tr(\rho a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\phi_n, a(\phi_1, \phi_n)\phi_1) = (\phi_1, a\phi_1).$$

Aus der letzten Gleichung folgt $(\psi, a\psi) \geq 0$ und da die Wahl von $\psi \in \mathcal{H}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Aus der zweiten Grundannahme $T_t^*(L^1(\mathcal{H})^+) \subset L^1(\mathcal{H})^+$ folgt für $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$

$$0 \leq Tr(T_t^*(\rho)a) = Tr(\rho T_t(a)), \qquad \forall \rho \in L^1(\mathcal{H})^+.$$

Mit dem eben bewiesenen Lemma ergibt sich als Forderung im Heisenbergbild, daß T_t positiv sein muß.

Die Halbgruppe T_t^* auf $L^1(\mathcal{H})$ war als schwach stetig vorausgesetzt, für die duale Halbgruppe auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ muß also die Schwach-$*$-Stetigkeit gefordert werden. Damit ist T_t eine C_0^*-Halbgruppe auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Zusammenfassend wird nun für allgemeine C^*- und v. Neumann-Algebren gefordert:

Grundannahmen für dynamische Halbgruppen im Heisenbergbild:
Sei $\mathcal{A}$ eine v. Neumann-Algebra (bzw. unitale C^*-Algebra) und T_t eine einparametrige Halbgruppe auf $\mathcal{A}$. Es gelte weiterhin:
1. $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, für alle $t \geq 0$.
2. $T_t(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{A}^+$.
3. T_t ist C_0^*-Halbgruppe (C_0-Halbgruppe).

C^*-Algebren $\mathcal{A}$, die einen Prädualraum besitzen, sind nach Sakais Theorem $*$-isomorph zu einer v. Neumann-Algebra. Da die Schwach-$*$-Topologie auf $\mathcal{A}$ von den Elementen des Prädualraums erzeugt wird, sind schwach-$*$-stetige Halbgruppen, also C_0^*-Halbgruppen, auf C^*-Algebren nicht sinnvoll. Daher nimmt man stattdessen die C_0-Eigenschaft.

Es soll nun auf den irreversiblen Charakter der Dynamik eingegangen werden. Die Diskussion ist dabei an [Thi80], Kapitel 3.1, angelehnt.
Es wird ein System S betrachtet und ein daran gekoppeltes Wärmebad W. Mit $\mathcal{H}_S$ und $\mathcal{H}_W$ werden die zu dem offenen System S und dem Wärmebad W gehörenden Hilberträume bezeichnet. Es sei $\rho \otimes \sigma$ ein faktorisierter Anfangszustand, $\rho \in L^1(\mathcal{H}_S)$, $\sigma \in L^1(\mathcal{H}_W)$, und U_t die unitäre Hamiltondynamik auf $L^1(\mathcal{H}_S) \otimes L^1(\mathcal{H}_W)$. Sie implementiert die Dynamik T_t für das offene System:

$$Tr(\rho \otimes \sigma U_{-t}(a \otimes \mathbb{1})U_t) = Tr_S(\rho T_t(a)) = Tr_S(T_t^*(\rho)a),$$

$a \otimes \mathbb{1}$ ist dabei eine Observable von S.
Die Entropie eines allgemeinen Systems, dessen Zustand durch eine Dichtematrix beschrieben wird, bleibt konstant, wenn die Dichtematrix unitär transformiert wird, wie zum Beispiel hier die Dichtematrix des Gesamtsystems $U_t(\rho \otimes \sigma)U_{-t}$. Die Dynamik des offenen Systems ist im allgemeinen nicht durch eine unitäre Transformation der Dichtematrix ρ gegeben. Die Entropie von S also nicht notwendig invariant unter T_t^*. Über das Vorzeichen der Entropieänderung von S kann keine Aussage getroffen werden. Ist die Temperatur des Systems S am Anfang größer als die Temperatur des Wärmebads W, so nimmt die Entropie von S im Laufe der Zeit ab. Ist S am Anfang kälter als W, so nimmt die Entropie von S mit der Zeit zu. Aus diesem Grund erweist es sich als zweckmäßig, die folgendermaßen definierte relative Entropie

$$S(\omega, \eta) := Tr(\omega(\ln \omega - \ln \eta)) \quad \omega, \eta \geq 0, \quad Tr(\omega) = Tr(\eta) = 1$$

zu betrachten. Die Dichtematrizen ω, η seien dabei aus demselben $L^1(\mathcal{H})$, speziell hier also aus $L^1(\mathcal{H}_S)$. Die relative Entropie ist stets positiv. Setzt man für η die Dichtematrix des Gleichgewichtszustandes ein, so ist $S(\omega, \eta)$ gerade die inverse Temperatur β multipliziert mit der Differenz von der freien Energie des Zustandes ω und der des Gleichgewichtszustandes η. Sind ρ, σ und T_t^* wie in obiger Diskussion gegeben, so kann folgendes Ergebnis gezeigt werden:

Satz 3.2 $S(T_t^*(\rho), T^*(\sigma))$ *ist eine in* t *monoton fallende Funktion.*

Beweis : In [Thi80], 3.1,12. □

Wegen der Positivität der relativen Entropie existiert $\lim_{t\to\infty} S((T_t^*(\rho), T^*(\sigma))$. Die freie Energie muß jedoch nicht den Gleichgewichtswert erreichen, da der Grenzwert größer Null sein kann.

Für Anwendungen der in dieser Arbeit betrachteten Halbgruppen in der Physik sei beispielsweise auf [Isa95] und die darin zitierte Literatur verwiesen.

Neben der irreversiblen Thermodynamik finden die positiven, unitalen Halbgruppen Verwendung in der Quantenstochastik [Par92].

Kapitel 4

Charakterisierung der Generatoren dynamischer Halbgruppen auf C^*-Algebren

In diesem Kapitel wird untersucht, welche Bedingungen ein Generator einer C_0-Halbgruppe T_t auf einer C^*-Algebra erfüllen muß, damit T_t unital und positiv beziehungsweise unital und vollständig positiv ist.
Die Untersuchung ist in zwei Abschnitte unterteilt. Im ersten werden positive, unitale Halbgruppen, im zweiten vollständig positive, unitale Halbgruppen betrachtet.

4.1 Der positive Fall

Im folgenden sei $\mathcal{A}$ immer eine unitale C^*-Algebra, deren Einselement mit $\mathbb{1}$ bezeichnet wird. Die Definitionsbereiche $D(A)$ von linearen Abbildungen A seien Unterräume von $\mathcal{A}$. Für den positiven Kegel von $\mathcal{A}$ wird die Bezeichnung $\mathcal{A}^+$ gewählt.

In diesem Abschnitt werden C_0-Halbgruppen T_t auf $\mathcal{A}$ betrachtet, die unital, das heißt $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, und positiv, das heißt $T_t(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{A}^+$, für alle $t \geq 0$ sind. Aus diesen Eigenschaften und dem nächsten Satz folgt, daß für jede positive, unitale Halbgruppe T_t auf $\mathcal{A}$ und für alle $t \geq 0$ die Gleichung $\|T_t\| = 1$ gilt.

Satz 4.1 *Sei Φ eine lineare Abbildung zwischen zwei unitalen C^*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Es folgt, daß Φ genau dann positiv ist, wenn $\|\Phi\| = 1$ gilt.*

Beweis : In [Bra87], 3.2.6. □

In den nachfolgenden Untersuchungen werden die sogenannten symmetrischen linearen Abbildungen eine zentrale Rolle spielen.

Definition 4.2 *Sei A eine lineare Abbildung $A : D(A) \to \mathcal{A}$. A heißt symmetrisch, falls $\forall a \in D(A)$*

$$A(a)^* = A(a^*)$$

gilt.

Man beachte, daß die Definitionsbereiche von symmetrischen Abbildungen $*$-lineare Unterräume der Algebra sind, das heißt, mit $a \in D(A)$ ist auch $a^* \in D(A)$.
Einige Autoren verwenden statt des Begriffs 'symmetrisch' für solche Abbildungen einen der Begriffe 'hermitesch' oder 'selbstadjungiert'.

Es soll nun bewiesen werden, daß die Generatoren positiver Halbgruppen symmetrisch sind. Weiterhin wird gezeigt, daß der Definitionsbereich der Generatoren dicht im selbstadjungierten Teil der Algebra liegt. Dies ist, obwohl der Generator dicht definiert ist, nicht selbstverständlich. Denn folgende einfache Überlegung zeigt, daß $\mathcal{A}^{sa}$ keine inneren Punkte in der Normtopologie von $\mathcal{A}$ besitzt:
Für $x \in \mathcal{A}^{sa}$ konvergiert $\frac{1}{n}x$ gegen Null und deshalb $x_n := x + \frac{i}{n}x$ gegen x, aber für alle $n \in I\!N$ gilt $x_n \notin \mathcal{A}^{sa}$.

Satz 4.3 *Sei T_t eine positive C_0-Halbgruppe auf $\mathcal{A}$, dann ist der Generator A symmetrisch und es gilt $\overline{D(A) \cap \mathcal{A}^{sa}} = \mathcal{A}^{sa}$.*

Beweis : Sei $x \in \mathcal{A}$ beliebig, dann kann x eindeutig in vier positive Elemente zerlegt werden:

$$x = a - b + i(c - d), \quad a, b, c, d \in \mathcal{A}^+.$$

Die Halbgruppe T_t ist nach Voraussetzung positiv, es gilt für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} T_t(x^*) &= T_t(a - b - i(c - d)) \\ &= T_t(a) - T_t(b) - i(T_t(c) - T_t(d)) \\ &= (T_t(a) - T_t(b) + i(T_t(c) - T_t(d)))^* \\ &= T_t(x)^*, \end{aligned}$$

also ist T_t symmetrisch.
Sei nun $a \in D(A)$ beliebig. Wegen

$$\begin{aligned} A(a)^* &= (\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h(a) - a))^* \\ &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h(a)^* - a^*) \\ &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h(a^*) - a^*) \end{aligned}$$

ist $a^* \in D(A)$, und es gilt $A(a)^* = A(a^*)$. Bei der letzten Rechnung wurde ausgenutzt, daß die $*$-Abbildung normstetig ist.

A ist als Generator der C_0-Halbgruppe T_t dicht definiert. Sei $u \in \mathcal{A}^{sa}$, dann existiert eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, die gegen u konvergiert. Jedes Folgenglied u_n kann eindeutig in zwei selbstadjungierte Elemente zerlegt werden:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2}(u_n + u_n^*) + i\frac{1}{2i}(u_n - u_n^*) \\ &=: y_n + iz_n, \end{aligned}$$

dabei sind $y_n, z_n \in D(A) \cap \mathcal{A}^{sa}$. Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt $y_n \to u$ und damit $\overline{D(A) \cap \mathcal{A}^{sa}} = \mathcal{A}^{sa}$. □

Im nächsten Satz wird gezeigt, daß es ausreicht, an den Generator A einer C_0-Halbgruppe T_t von Kontraktionen die Forderungen zu stellen, daß A symmetrisch ist und $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$ gilt, um zu garantieren, daß T_t positiv und unital ist. Da diese Bedingungen im Gegensatz zu bisher bekannten Forderungen sehr einfach nachzuprüfen sind, ist die Aussage von Satz 4.4 von großem Interesse. Auf diesen Punkt wird ausführlich in Kapitel 6 eingegangen werden. Man beachte im folgenden Beweis, daß zum Nachweis der Positivität von T_t sowohl die Symmetrie von A als auch die Eigenschaft $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$ verwendet wird.

Satz 4.4 *Sei T_t eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen auf $\mathcal{A}$, deren Generator A die folgenden Eigenschaften habe:*
i) $\mathbb{1} \in D(A), \quad A(\mathbb{1}) = 0$,
ii) A ist symmetrisch.
Dann ist T_t eine positive, unitale Halbgruppe.

Beweis : Zuerst wird bewiesen, daß $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ für alle $t \geq 0$ gilt.
Die Resolvente $R(\lambda, A) := (\lambda 1 - A)^{-1} : \mathcal{A} \to D(A)$ existiert nach dem Hille-Yosida-Theorem für alle $\lambda > 0$. Sei $\mathbb{1} \in D(A)$ und $A(\mathbb{1}) = 0$, dann gilt für alle $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= R(\lambda, A)(\lambda 1 - A)(\mathbb{1}) \\ &= R(\lambda, A)(\lambda \mathbb{1}) \\ \Rightarrow \quad R(\lambda, A)(\mathbb{1}) &= \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Die Beziehung zwischen Halbgruppe und Resolvente ist durch die Exponentialformel aus Satz 2.15 gegeben:

$$T_t(a) = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{t}{n}A)^{-n}(a) = \lim_{n\to\infty}[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, A)]^n(a)$$

für alle $a \in \mathcal{A}$. Nun ist

$$[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, A)]^n(\mathbb{1}) = (\frac{n}{t})^n(\frac{t}{n})^n\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

und somit gilt $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

Sei A symmetrisch, dann ist für $\lambda > 0$ auch $\lambda 1 - A$ symmetrisch. Zu $x \in \mathcal{A}$ gibt es genau ein $y \in D(A)$ derart, daß $(\lambda 1 - A)^{-1}(x) = y$ gilt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} ((\lambda 1 - A)^{-1}(x))^* &= y^* \\ &= ((\lambda 1 - A)^{-1}(\lambda 1 - A))(y^*) \\ &= (\lambda 1 - A)^{-1}((\lambda 1 - A)(y^*)) \\ &= (\lambda 1 - A)^{-1}(x^*). \end{aligned}$$

Die Resolvente $R(\lambda, A)$ ist also für alle $\lambda > 0$ symmetrisch. Wegen $\|b\| = \|b^*\|$ für $b \in \mathcal{A}$, ist die $*$-Abbildung stetig, für eine konvergente Folge $\{b_n\}_{n\in I\!N}$ aus $\mathcal{A}$ gilt also insbesondere

$$(\lim_{n\to\infty} b_n)^* = \lim_{n\to\infty} b_n^*.$$

Deswegen ergibt sich mit der schon oben verwendeten Exponentialformel:

$$T_t(a)^* \quad = \quad (\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, A)]^n(a))^*$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t},A)]^n(a)^* \\
&= \lim_{n\to\infty}[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t},A)]^n(a^*) \\
&= T_t(a^*).
\end{aligned}
$$

Also ist auch T_t symmetrisch.

Sei $a \in \mathcal{A}^+$, definiere $a_1 := \frac{a}{\|a\|}$. Dann ist $a_1 \in \mathcal{A}^+$ und $\|a_1\| = 1$. Für das Spektrum von a_1 erhält man $\sigma(a_1) \subseteq [0,1]$. Daraus folgt $1 - \sigma(a_1) = \sigma(\mathbb{1} - a_1) \subseteq [0,1]$ und deshalb gilt die Ungleichung $\|\mathbb{1} - a_1\| \leq 1$. Mit $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ folgt nach dem bereits Bewiesenen

$$
\begin{aligned}
\|\mathbb{1} - T_t(a_1)\| &= \|T_t(\mathbb{1}) - T_t(a_1)\| \\
&\leq \|T_t\|\|\mathbb{1} - a_1\| \\
&\leq \|\mathbb{1} - a_1\|.
\end{aligned}
$$

Da die Halbgruppe T_t symmetrisch ist, bildet sie selbstadjungierte Elemente auf selbstadjungierte ab:

$$T_t(a)^* = T_t(a^*) = T_t(a) \qquad \forall a \in \mathcal{A}^{sa}.$$

Das heißt insgesamt $T_t(a_1) \in \mathcal{A}^{sa}$ und $\|\mathbb{1} - T_t(a_1)\| \leq 1$. Für das Spektrum gilt dann $1 - \sigma(T_t(a_1)) = \sigma(\mathbb{1} - T_t(a_1)) \subseteq [-1,1]$ und daraus folgt $\sigma(T_t(a_1)) \subseteq [0,2]$, also ist $T_t(a_1) \in \mathcal{A}^+$.
$\mathcal{A}^+$ ist ein positiver, konvexer Kegel, d.h. für $\nu \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathcal{A}^+$ ist auch $\nu x \in \mathcal{A}^+$. Insbesondere bedeutet dies

$$T_t(a) = \|a\| T_t(a_1) \quad \in \mathcal{A}^+.$$

$\square$

In Satz 4.3 wurde die Eigenschaft $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, die eine positive, unitale Halbgruppe zusätzlich zur Positivität besitzt, nicht benötigt. Setzt man sie voraus, folgt wegen

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(T_h(\mathbb{1}) - \mathbb{1}) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(\mathbb{1} - \mathbb{1}) = 0$$

für den Generator A: $\mathbb{1} \in D(A)$ und $A(\mathbb{1}) = 0$. Die vorhergehenden Sätze können mit dieser Zusatzvoraussetzung folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Korollar 4.5 *Sei T_t eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen auf $\mathcal{A}$ und A der Generator der Halbgruppe. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
i) T_t ist eine positive, unitale Halbgruppe.
ii) A ist symmetrisch und es gilt: $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$.

Beweis : Folgt aus den Sätzen 4.3 und 4.4. □

Im folgenden soll der Definitionsbereich des Generators einer positiven C_0-Halbgruppe genauer untersucht werden.

Satz 4.6 *Sei A der Generator einer positiven C_0-Halbgruppe T_t auf $\mathcal{A}$. Dann gilt:*

$$\overline{(\cap_{k\in\mathbb{N}} D(A^k)) \cap \mathcal{A}^{sa}} = \mathcal{A}^{sa}.$$

Beweis : Nach Satz 2.14 ist die Menge

$$E := \operatorname{span}\{y \in \mathcal{A} : \exists \phi \in C_0^\infty((0,\infty), \mathbb{R}), x \in \mathcal{A}, \text{s.d. } \; y = \int_0^\infty \phi(s) T_s(x) ds\}$$

Teilmenge von $\cap_{k\in\mathbb{N}} D(A^k)$ und liegt dicht in $\mathcal{A}$. Nach Voraussetzung ist T_t positiv, für $a \in \mathcal{A}^{sa}$ ist dann $T_s(a) \in \mathcal{A}^{sa}$ und für $\phi \in C_0^\infty((0,\infty), \mathbb{R})$ auch $\phi(s)T_s(a) \in \mathcal{A}^{sa}$. Wegen der Normabgeschlossenheit des selbstadjungierten Teils einer C^*-Algebra liegt das Integral $\int_0^\infty \phi(s)T_s(a)ds$ in $\mathcal{A}^{sa}$. Die Menge

$$E^{sa} := \operatorname{span}\{y \in \mathcal{A} : \exists \phi \in C_0^\infty((0,\infty), \mathbb{R}), a \in \mathcal{A}^{sa}, \text{s.d. } \quad y = \int_0^\infty \phi(s) T_s(a) ds\},$$

wobei hier die reelle lineare Hülle gemeint ist, ist also Teilmenge von $\mathcal{A}^{sa}$, aber auch Teilmenge von $\cap_{k\in\mathbb{N}} D(A^k)$. Wiederholtes Anwenden von A auf Elemente aus E^{sa} führt diese wegen

$$A^k(\int_0^\infty \phi(s)T_s(x)ds) = (-1)^k \int_0^\infty \phi^{(k)}(s)T_s(x)ds$$

oder $A(\int_0^\infty \phi(s)T_s(z)ds) = 0$, falls $T_s(z) = \text{const.}$ für alle $s \geq 0$ gilt, nicht aus dem selbstadjungierten Teil heraus:

$$A^k(E^{sa}) \subset \mathcal{A}^{sa}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nun soll gezeigt werden, daß $\overline{E^{sa} \cap \mathcal{A}^{sa}} = \mathcal{A}^{sa}$ gilt.
Sei $a \in \mathcal{A}^{sa}$ beliebig, dann existiert nach Satz 2.14 eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, die gegen a konvergiert. Die Folgenglieder lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k \in I_n} \alpha_n^k \int_0^\infty \phi_n^k(s) T_s(x_n^k) ds \\ &= \sum_{k \in I_n} \int_0^\infty \phi_n^k(s) T_s(z_n^k) ds, \end{aligned}$$

dabei sind die I_n endliche Indexmengen und $z_n^k := \alpha_n^k x_n^k$. Die a_n und z_n^k können eindeutig in je zwei selbstadjungierte Elemente zerlegt werden:

$$\begin{aligned} a_n &= b_n + ic_n, \\ z_n^k &= u_n^k + iv_n^k. \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung kann die folgende Identifizierung vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k \in I_n} \int_0^\infty \phi_n^k(s) T_s(u_n^k) ds \quad \in E^{sa}, \\ c_n &= \sum_{k \in I_n} \int_0^\infty \phi_n^k(s) T_s(v_n^k) ds \quad \in E^{sa}. \end{aligned}$$

Weiterhin folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $b_n \to a$, also $\overline{E^{sa}} = \mathcal{A}^{sa}$ und damit die Behauptung. □

Im Anschluß an Satz 2.14 wurde bemerkt, daß die Menge

$$F := \operatorname{span}\{y \in \mathcal{A} : \exists \phi \in C_0^\infty((0,\infty), \mathbb{R}^+), x \in \mathcal{A}, \text{s.d.} \quad y = \int_0^\infty \phi(s) T_s(x) ds\}$$

Teilmenge des Definitionsbereichs des Generators A der Halbgruppe T_t ist und dicht in $\mathcal{A}$ liegt. Mit Hilfe dieser Menge wird jetzt gezeigt, daß der Definitionsbereich des Generators einer positiven Halbgruppe sogar dicht im positiven Kegel der Algebra liegt. Eine zum Beweis von Satz 4.3 analoge Schlußweise ist nicht möglich, denn wenn ein Element des Definitionsbereiches in vier positive Elemente zerlegt wird, so liegen diese nicht mehr unbedingt im Definitionsbereich. Im Beweis von Satz 4.3 wurde aber entscheidend ausgenutzt, daß die Zerlegung in selbstadjungierte Elemente nicht aus dem Definitionsbereich herausführt. Der nächste Satz ist von Interesse, da man festgestellt hat, daß sich der Generator normstetiger, vollständig positiver, unitaler Halbgruppen explizit darstellen läßt und dann aus verschiedenen Termen zusammensetzt, von denen einer eine vollständig positive Abbildung ist. Auf diesen Punkt wird genauer in Kapitel 6 eingegangen werden. Im nicht normstetigen Fall ist der Generator nicht auf der ganzen Algebra definiert. Das folgende Resultat besagt jedoch, daß 'genügend' positive Elemente im Definitionsbereich liegen.

Satz 4.7 *Sei T_t eine positive C_0-Halbgruppe auf $\mathcal{A}$ mit Generator A. Dann gilt:* $\overline{D(A) \cap \mathcal{A}^+} = \mathcal{A}^+$.

Beweis : Sei $y \in \mathcal{A}^+$ beliebig, dann existiert eine Folge $\{y_n\}_{n \in I\!N}$ aus

$$F := \operatorname{span}\{w \in \mathcal{A} : \exists \phi \in C_0^\infty((0,\infty), I\!R^+), x \in \mathcal{A}, \text{s.d. } \; w = \int_0^\infty \phi(s) T_s(x) ds\},$$

die gegen y konvergiert. Jedes y_n kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{k \in I_n} \alpha_n^k \int_0^\infty \phi_n^k(s) T_s(x_n^k) ds \\ &= \sum_{k \in I_n} \int_0^\infty \phi_n^k(s) T_s(z_n^k) ds, \end{aligned}$$

mit $z_n^k := \alpha_n^k x_n^k$, wobei I_n endliche Indexmengen sind. Jedes y_n und z_n^k kann eindeutig in vier positive Elemente zerlegt werden:

$$\begin{aligned} y_n &= p_n - q_n + i(u_n - v_n), \qquad & p_n, q_n, u_n, v_n \in \mathcal{A}^+, \\ z_n^k &= a_n^k - b_n^k + i(c_n^k - d_n^k), \qquad & a_n^k, b_n^k, c_n^k, d_n^k \in \mathcal{A}^+. \end{aligned}$$

Für positive Elemente $a \in \mathcal{A}^+$ ist $\phi(s) T_s(a) \in \mathcal{A}^+$ für alle $s \geq 0$, da vorausgesetzt war, daß die Halbgruppe positiv ist und ϕ eine positive Funktion ist. Wegen der Normabgeschlossenheit des positiven Kegels ist dann auch das Integral $\int_0^\infty \phi(s) T_s(a) ds \in \mathcal{A}^+$. Deshalb kann wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung auf

$$p_n = \sum_{k \in I_n} \int_0^\infty \phi_n^k(s) T_s(a_n^k) ds \quad \in \mathcal{A}^+$$

geschlossen werden. Wiederum aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt $p_n \to y$, also $\overline{D(A) \cap \mathcal{A}^+} = \mathcal{A}^+$. □

4.2 Der vollständig positive Fall

Es sei $\mathcal{A}$ stets eine unitale C^*-Algebra, $\mathcal{M}(n,\mathcal{A})$ die C^*-Algebra der $n \times n$-Matrizen $a = [a_{ij}]$ mit Einträgen $a_{ij} \in \mathcal{A}$. Mit $\Phi^{(n)}$ wird die zu jeder linearen Abbildung $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ gehörende Abbildung $\Phi^{(n)} : \mathcal{M}(n,\mathcal{A}) \to \mathcal{M}(n,\mathcal{A})$, $\Phi^{(n)}[a_{ij}] := [\Phi(a_{ij})]$ bezeichnet.

In diesem Abschnitt werden C_0-Halbgruppen T_t auf $\mathcal{A}$ betrachtet, die unital und vollständig positiv sind, das heißt es gilt $T_t^{(n)}(\mathcal{M}(n,\mathcal{A})^+) \subseteq \mathcal{M}(n,\mathcal{A})^+$ für alle $n \in I\!N$ und $t \geq 0$.

Im folgenden sollen Eigenschaften der Halbgruppe T_t auf die Halbgruppe $T_t^{(n)}$, die auf $\mathcal{M}(n,\mathcal{A})$ operiert, übertragen werden. Hierbei wird die nachstehende Ungleichung aus Satz 2.4 für $[u_{ij}] \in \mathcal{M}(n,\mathcal{A})$ von Nutzen sein:

$$\|u_{ij}\| \leq \|[u_{ij}]\| \leq \sum_{k,l=1}^{n} \|u_{kl}\|, \qquad i,j = 1,\ldots n.$$

Zuerst soll die C_0-Eigenschaft übertragen werden. Sei T_t eine C_0-Halbgruppe auf $\mathcal{A}$, dann gilt für $T_t^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \|T_t^{(n)}[a_{ij}] - [a_{ij}]\| &= \|[T_t(a_{ij})] - [a_{ij}]\| \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{n} \|T_t(a_{kl}) - a_{kl}\| \to 0 \end{aligned}$$

für $t \to 0$ und beliebiges $[a_{ij}] \in \mathcal{M}(n,\mathcal{A})$. Sei weiterhin $t \geq 0$ beliebig aber fest, und $\{[u_{ij}]_\nu\}_{\nu \in I\!N} = \{[u_{ij,\nu}]\}_{\nu \in I\!N} \subset \mathcal{M}(n,\mathcal{A})$ eine Folge, die gegen $[u_{ij}]$ konvergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|T_t^{(n)}[u_{ij,\nu}] - T_t^{(n)}[u_{ij}]\| &= \|[T_t(u_{ij,\nu} - u_{ij})]\| \\ &\leq \sum_{l,m=1}^{n} \|T_t(u_{lm,\nu} - u_{lm})\| \to 0 \end{aligned}$$

für $\nu \to \infty$. Das heißt, daß $T_t^{(n)}$ eine C_0-Halbgruppe ist.
Ist A der Generator der C_0-Halbgruppe T_t, so erzeugt $A^{(n)}$ die C_0-Halbgruppe $T_t^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \|A^{(n)}[a_{ij}] - \frac{1}{t}(T_t^{(n)}[a_{ij}] - [a_{ij}])\| &= \|[A(a_{ij})] - \frac{1}{t}([T_t(a_{ij}) - a_{ij}])\| \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{n} \|A(a_{kl}) - \frac{1}{t}(T_t(a_{kl}) - a_{kl})\| \to 0 \end{aligned}$$

für $t \to 0$, falls der Grenzwert existiert. Aus dieser Rechnung ergibt sich für den Definitionsbereich:

$$D(A^{(n)}) = \{[a_{ij}] \in \mathcal{M}(n, \mathcal{A}) : a_{ij} \in D(A), 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt vollständig kontraktiv, falls alle Abbildungen $\Phi^{(n)}$ kontraktiv sind.

Mit diesen Vorbetrachtungen können die Aussagen über positive, unitale Halbgruppen aus dem letzten Abschnitt auf den vollständig positiven Fall übertragen werden.

Satz 4.8 *Sei T_t eine vollständig positive C_0-Halbgruppe auf $\mathcal{A}$, dann ist der Generator A symmetrisch.*

Beweis : Die Halbgruppe T_t ist positiv, also ist der Generator nach Satz 4.3 symmetrisch. □

Satz 4.9 *Sei A der Generator der C_0-Halbgruppe T_t von vollständigen Kontraktionen auf $\mathcal{A}$. A habe die weiteren Eigenschaften*
i) $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$,
ii) A ist symmetrisch.
Dann ist T_t eine unitale, vollständig positive Halbgruppe.

Beweis : Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach der vorangegangenen Diskussion ist $T_t^{(n)}$ eine C_0-Halbgruppe auf $\mathcal{M}(n, \mathcal{A})$. Aus $A(\mathbb{1}) = 0$ folgt nach Satz 4.4, daß $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ gilt. Diese Unitalität überträgt sich folgendermaßen auf $T_t^{(n)}$: Das Einselement aus $\mathcal{M}(n, \mathcal{A})$ ist $[\delta_{ij}]$, es ergibt sich

$$T_t^{(n)}[\delta_{ij}] = [T_t(\delta_{ij})] = [\delta_{ij}].$$

Aus $A(\mathbb{1}) = 0$ folgt weiterhin $[\delta_{ij}] \in D(A^{(n)})$ und $A^{(n)}[\delta_{ij}] = [A(\delta_{ij})] = 0$.
Sei $x_{ij} \in D(A)$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Dann folgt aus der Symmetrie von A wegen

$$(A^{(n)}[x_{ij}])^* = [A(x_{ij})]^* = [A(x_{ji})^*] = [A(x_{ji}^*)] = A^{(n)}([x_{ij}]^*),$$

die Symmetrie von $A^{(n)}$.
Von $T_t^{(n)}$ und $A^{(n)}$ werden also alle Voraussetzungen von Satz 4.4 erfüllt, $T_t^{(n)}$ ist deshalb eine positive, unitale Halbgruppe auf der C^*-Algebra $\mathcal{M}(n, \mathcal{A})$.

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Setzt man in Satz 4.8 zusätzlich voraus, daß T_t eine unitale Halbgruppe ist, so bekommt man:

Satz 4.10 *Sei T_t eine C_0-Halbgruppe von vollständigen Kontraktionen mit Generator A auf der C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
i) T_t ist eine unitale, vollständig positive Halbgruppe.
ii) A ist symmetrisch und es gilt: $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$.

Beweis : Folgt aus den beiden vorangegangenen Sätzen 4.8, 4.9 und Korollar 4.5. $\square$

Da die von einem Generator erzeugte Halbgruppe eindeutig bestimmt ist, kann die folgende Identifizierung vorgenommen werden:

Satz 4.11 *Jede positive, unitale C_0-Halbgruppe T_t von vollständigen Kontraktionen auf $\mathcal{A}$ ist bereits vollständig positiv.*

Beweis : Ergibt sich aus Satz 4.10 und Korollar 4.5. $\square$

Kapitel 5

Charakterisierung der Generatoren dynamischer Halbgruppen auf v. Neumann-Algebren

Im vorangegangenen Kapitel wurden unitale, positive beziehungsweise unitale, vollständig positive Halbgruppen auf C^*-Algebren durch Eigenschaften ihres Generators charakterisiert. Als nächstes wollen wir solche Halbgruppen auf v. Neumann-Algebren untersuchen. Der Hauptunterschied wird dabei in der Stetigkeit der Halbgruppe liegen. Auf C^*-Algebren können C_0^*-Halbgruppen, das heißt schwach-$*$-stetige Halbgruppen, nicht sinnvoll definiert werden. Es gibt nur dann eine Schwache-$*$-Topologie, wenn die Algebra einen Prädualraum besitzt. Aber in diesem Fall ist die C^*-Algebra nach Sakais Theorem automatisch $*$-isomorph zu einer v. Neumann-Algebra. Aus diesem Grund beschränkte sich die Untersuchung im letzten Kapitel auf C_0-Halbgruppen. Im folgenden werden also schwach-$*$-stetige Halbgruppen betrachtet. Das Kapitel ist in zwei Abschnitte aufgeteilt, im ersten werden positive, unitale Halbgruppen, im zweiten vollständig positive, unitale Halbgruppen untersucht.

5.1 Positive, unitale Halbgruppen

Von Neumann-Algebren werden im folgenden immer mit $\mathcal{N}$ bezeichnet, der Prädualraum von $\mathcal{N}$ mit $\mathcal{N}_*$. Die aus dieser Dualität entspringende Schwach-

$*$-Topologie auf $\mathcal{N}$ wird an einigen Stellen als $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$-Topologie bezeichnet. Weiterhin werden, wo es übersichtlicher ist, Dualklammern $< \cdot, \cdot >$ verwendet. Der selbstadjungierte Teil der Algebra wird mit $\mathcal{N}^{sa}$, der positive Kegel mit $\mathcal{N}^+$ bezeichnet. Die Definitionsbereiche $D(A)$ linearer Abbildungen seien Teilmengen von $\mathcal{N}$. Als Symbol für das Einselement der Algebra wird $\mathbb{1}$ verwendet.

Im folgenden werden unitale, das heißt $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, und positive, das heißt $T_t(\mathcal{N}^+) \subseteq \mathcal{N}^+$, C_0^*-Halbgruppen auf $\mathcal{N}$ betrachtet. Jede v. Neumann-Algebra ist insbesondere eine unitale C^*-Algebra. Deshalb kann Satz 4.1 angewendet werden. Das liefert für die Norm von T_t:

$$\|T_t\| = 1 \qquad \forall t \geq 0.$$

Im vorangegangenen Kapitel haben wir über ein Resolventenargument gezeigt, daß positive Halbgruppen symmetrische Generatoren haben. Im folgenden wird - jetzt auf v. Neumann-Algebren - ein anderer Beweis gebracht. Die Symmetrie des Generators A wird durch Berechnung der Wirkung von A auf Elemente der Menge

$$\begin{aligned} E^{sa} := \operatorname{span}\{y \in \mathcal{N} \quad : \quad & \exists \phi \in C_0^\infty((0,\infty), \mathbb{R}), x \in \mathcal{N}^{sa}, \text{s.d.} \\ & < x_*, y >= \int_0^\infty \phi(s) < x_*, T_s(x) > ds, \quad \forall x_* \in \mathcal{N}_*\}, \end{aligned}$$

wobei hier die reelle lineare Hülle gemeint ist, und ein Abgeschlossenheitsargument gezeigt. Der Vorteil gegenüber dem Beweis von Satz 4.3 liegt in der direkten Zugänglichkeit der Eigenschaften von A, die der Positivität entsprechen. Denn bei einer Charakterisierung der Generatoren einer Halbgruppe ist gerade das Herausfinden der wesentlichen Eigenschaften der Generatoren eine der schwierigsten Angelegenheiten.
Zum Beweis benötigen wir folgende Aussage, die ein Analogon zu Satz 2.14 für C_0^*-Halbgruppen ist:

Satz 5.1 *Sei T_t eine C_0^*-Halbgruppe auf $\mathcal{N}$. Dann ist die Menge*

$$\begin{aligned} E := span\{y \in \mathcal{N} \quad : \quad & \exists \phi \in C_0^\infty((0,\infty), \mathbb{R}), x \in \mathcal{N}, s.d. \\ & < x_*, y >= \int_0^\infty \phi(s) < x_*, T_s(x) > ds, \quad \forall x_* \in \mathcal{N}_*\} \end{aligned}$$

Teilmenge von $\cap_{k \in \mathbb{N}} D(A^k)$ und liegt schwach-$*$-dicht in $\mathcal{N}$.

Beweis : Es ist $\int_0^\infty |\phi(s)|ds = \int_0^\infty (\phi^+(s) + \phi^-(s))ds < \infty$, also existiert das Integral $\int_0^\infty \phi(s)T_s(x)ds$ in der Schwach-$*$-Topologie nach Satz 2.11. Das heißt, es existiert ein $y \in \mathcal{N}$, so daß für alle $x_* \in \mathcal{N}_*$ gilt:

$$< x_*, y >= \int_0^\infty \phi(s) < x_*, T_s(x) > ds.$$

Die zu einer C_0^*-Halbgruppe gehörende Halbgruppe auf dem Prädualraum $\mathcal{N}_*$, die im folgenden mit T_t^* bezeichnet wird, ist nach Konstruktion schwach stetig, also eine C_0-Halbgruppe. Sei $y = \int_0^\infty \phi(s)T_s(x)ds$ aus E, so daß für das zugehörige $x \in \mathcal{N}$ $T_s(x)$ nicht konstant für alle $s \geq 0$ ist. Für $h > 0$ und alle $x_* \in \mathcal{N}_*$ erhält man

$$\begin{aligned}
< x_*, \frac{1}{h}(T_h - 1)(y) > &= \frac{1}{h} < (T_h^* - 1^*)(x_*), y > \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty \phi(s) < (T_h^* - 1^*)(x_*), T_s(x) > ds \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty \phi(s) < x_*, (T_h - 1)T_s(x) > ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty \phi(s-h) < x_*, T_s(x) > ds \\
&\quad -\frac{1}{h} \int_0^\infty \phi(s) < x_*, T_s(x) > ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty (\phi(s-h) - \phi(s)) < x_*, T_s(x) > ds \\
&\quad -\frac{1}{h} \int_0^h \phi(s) < x_*, T_s(x) > ds.
\end{aligned}$$

Da der Träger von ϕ kompakte Teilmenge des Intervalls $(0, \infty)$ ist, konvergiert das letzte Integral für $h \downarrow 0$ gegen Null, das erste gegen $-\int_0^\infty \phi'(s) < x^*, T_s(x) > ds$. Es gilt also für alle $x_* \in \mathcal{N}_*$:

$$< x_*, A(y) >= -\int_0^\infty \phi'(s) < x_*, T_s(x) > ds, \tag{5.1}$$

das heißt $y \in D(A)$.
Nun ist mit ϕ trivialerweise auch für beliebiges $n \in I\!N$ die n-te Ableitung in $C_0^\infty((0, \infty), I\!R)$, es kann analog zum eben Bewiesenen geschlossen werden, daß für alle $x_* \in \mathcal{N}_*$ gilt:

$$< x_*, A^n(y) >= (-1)^n \int_0^\infty \phi^{(n)}(s) < x_*, T_s(x) > ds,$$

also $E \subset \cap_{n \in I\!N} D(A^n)$.
Für $y = \int_0^\infty \phi(s) T_s(x) ds$ mit $T_s(x) = \text{const.}$ für alle $s \geq 0$ ist $A(y) = 0$. Also ist $E \subseteq D(A)$.

$\mathcal{N}$ ist, versehen mit der Schwach-$*$-Topologie, ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Die Dichtheit von E kann also mit einem Hahn-Banach-Argument gezeigt werden.
Angenommen, E liegt nicht schwach-$*$-dicht in $\mathcal{N}$. Dann existiert ein lineares Funktional g, welches stetig bezüglich der Schwach-$*$-Topologie ist, so daß $g(y) = 0$ für alle $y \in \mathcal{E}$ ist, aber g nicht auf ganz $\mathcal{N}$ verschwindet. Wegen der Stetigkeit von g erhält man

$$\begin{aligned} 0 = g(y) &= \int_0^\infty \phi(s) g(T_s(x)) ds \\ &= \int_0^\infty \phi(s) \Re e[g(T_s(x))] ds + i \int_0^\infty \phi(s) \Im m[g(T_s(x))] ds. \end{aligned}$$

Die Funktionen

$$s \mapsto \Re e[g(T_s(x))] \quad \text{und} \quad s \mapsto \Im m[g(T_s(x))]$$

sind stetig, müssen also beide identisch verschwinden. Denn sonst wäre es möglich, ein $\phi \in C_0^\infty((0,\infty), I\!R)$ so zu wählen, daß die Integrale ungleich Null wären. Speziell für $s = 0$ bedeutet das

$$0 = g(T_0(x)) = g(x), \qquad \forall x \in N,$$

im Widerspruch zur Annahme. Also liegt E schwach-$*$-dicht in $\mathcal{N}$. $\square$

Bemerkung 5.2 *Aus dem Beweis entnimmt man, daß statt der Menge E auch die folgende Menge benutzt werden kann:*

$$\begin{aligned} F := span\{w \in \mathcal{N} \;&:\; \exists \phi \in C_0^\infty((0,\infty), I\!R^+), x \in \mathcal{N}, s.d. \\ & < x_*, w >= \int_0^\infty \phi(s) < x_*, T_s(x) > ds, \quad \forall x_* \in \mathcal{N}_*\}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, daß positive Halbgruppen auf v. Neumann-Algebren symmetrische Generatoren haben. Die Annahme, daß die Halbgruppe unital ist, wird dazu nicht benötigt.

Satz 5.3 *Sei T_t eine positive C_0^*-Halbgruppe auf $\mathcal{N}$. Dann gilt für den Generator A:*
i) A ist symmetrisch.
ii) Die Menge $(\cap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)) \cap \mathcal{N}^{sa}$ liegt dicht im selbstadjungierten Teil der Algebra $\mathcal{N}^{sa}$ bezüglich der Schwach-$*$-Topologie.

Beweis : Definiere

$$E^{sa} := \mathrm{span}\{y \in \mathcal{N} \; : \; \exists \phi \in C_0^\infty((0,\infty),\mathbb{R}), x \in \mathcal{N}^{sa}, \text{s.d.} \quad < x_*, y > = \int_0^\infty \phi(s) < x_*, T_s(x) > ds, \quad \forall x_* \in \mathcal{N}_*\},$$

wobei hier die reelle lineare Hülle gemeint ist. Sei $y \in E^{sa}$ beliebig. Das Integral $y = \int_0^\infty \phi(s)T_s(x)ds$ existiert in der schwach-$*$-Topologie nach Satz 2.11. Um zu zeigen, daß $E^{sa} \subset \mathcal{N}^{sa}$ gilt, wird zuerst bewiesen, daß der selbstadjungierte Teil einer v. Neumann-Algebra abgeschlossen in der schwach-$*$-Topologie ist.

Sei $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{N}^{sa}$ ein in der schwachen Operatortopologie konvergentes Netz. Da jede v. Neumann-Algebra $\mathcal{N}$ abgeschlossen in der schwachen Operatortopologie ist und Teilalgebra der Algebra der beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist, existiert ein $x \in \mathcal{N}$ mit

$$(\phi, x_\lambda\psi) \to (\phi, x\psi), \qquad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Die $*$-Abbildung ist stetig in der schwachen Operatortopologie, das heißt in diesem Fall, da für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Gleichheit $x_\lambda^* = x_\lambda$ gilt, daß auch x_λ^* gegen x konvergiert. Also gilt $x^* = x$, das heißt, daß der selbstadjungierte Teil der Algebra in der schwachen Operatortopologie abgeschlossen ist.
Die schwach-$*$-Topologie ist feiner als die schwache Operatortopologie, deshalb ist der selbstadjungierte Teil der Algebra $\mathcal{N}^{sa}$ auch in der schwach-$*$-Topologie abgeschlossen.

Die Halbgruppe T_t bildet als positive Abbildung selbstadjungierte Elemente auf selbstadjungierte ab, denn jedes $a \in \mathcal{N}^{sa}$ kann eindeutig in zwei positive Elemente a^+ und $a^- \in \mathcal{N}^+$ zerlegt werden: $a = a^+ - a^-$. Die Selbstadjungiertheit von $T_t(a)$ folgt dann aus der Linearität der Halbgruppe. Das bedeutet, daß für $a \in \mathcal{N}^{sa}$ und $\phi \in C_0^\infty((0,\infty),\mathbb{R})$ auch $\phi(s)T_s(a) \in \mathcal{N}^{sa}$ für alle $s \geq 0$ gilt. Wegen der Schwach-$*$-Abgeschlossenheit von $\mathcal{N}^{sa}$ und der Existenz des Integrals $\int_0^\infty \phi(s)T_s(a)ds$ in der Schwach-$*$-Topologie gilt

$E^{sa} \subset \mathcal{N}^{sa}$.

Betrachte nun $y = \int_0^\infty \phi(s)T_s(x)ds$ aus E^{sa}, so daß nicht $T_s(x) = \text{const.}$ für alle $s \geq 0$ gilt. Die Wirkung von A auf y ist nach Gleichung 5.1 :

$$A(y) = -\int_0^\infty \phi'(s)T_s(x)ds,$$

das bedeutet, daß auch $A(y) \in \mathcal{N}^{sa}$ gilt. Da der Generator A diejenigen $y_0 = \int_0^\infty \phi(s)T_s(x_0)ds$, bei denen $T_s(x_0)$ eine konstante Funktion ist, auf die Null abbildet, folgt insgesamt $A(E^{sa}) \subseteq \mathcal{N}^{sa}$.

Der Definitionsbereich von A liegt $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$-dicht in $\mathcal{N}$. Daraus kann nicht gefolgert werden, daß der $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$-Abschluß von $D(A) \cap \mathcal{N}^{sa}$ gleich $\mathcal{N}^{sa}$ ist. Denn da $\mathcal{N}^{sa}$ keine inneren Punkte in der Normtopologie hat, wie vor Satz 4.3 bemerkt wurde, hat $\mathcal{N}^{sa}$ auch kein Inneres in der schwach-$*$-Topologie, die gröber als die Normtopologie ist.
Sei $a \in \mathcal{N}^{sa}$ und E wie in Satz 5.1 gegeben. Da E schwach-$*$-dicht in $\mathcal{N}$ liegt, existiert ein Netz $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ aus E mit $y_\lambda \to a$. Dabei ist y_λ durch

$$\begin{aligned} y_\lambda &= \sum_{k\in I_\lambda} \alpha_\lambda^k \int_0^\infty \phi_\lambda^k(s)T_s(x_\lambda^k)ds \\ &= \sum_{k\in I_\lambda} \int_0^\infty \phi_\lambda^k(s)T_s(z_\lambda^k)ds \end{aligned}$$

gegeben, wobei die I_λ endliche Indexmengen sind und $z_\lambda^k := \alpha_\lambda^k x_\lambda^k$. Die Elemente y_λ und z_λ^k können eindeutig in selbstadjungierte Elemente zerlegt werden:

$$\begin{aligned} y_\lambda &= c_\lambda + id_\lambda, \qquad c_\lambda, d_\lambda \in \mathcal{N}^{sa}, \\ z_\lambda^k &= u_\lambda^k + iv_\lambda^k, \qquad u_\lambda^k, v_\lambda^k \in \mathcal{N}^{sa}. \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt

$$c_\lambda = \sum_{k\in I_\lambda} \int_0^\infty \phi_\lambda^k(s)T_s(u_\lambda^k)ds \quad \in \mathcal{N}^{sa},$$

$$d_\lambda = \sum_{k\in I_\lambda} \int_0^\infty \phi_\lambda^k(s)T_s(v_\lambda^k)ds \quad \in \mathcal{N}^{sa},$$

und weiterhin $c_\lambda \to a$, also, daß der Schwach-$*$-Abschluß von E^{sa} gleich $\mathcal{N}^{sa}$ ist. Da $E^{sa} \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$ nach Satz 5.1 gilt, erhält man :

$$\overline{(\cap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)) \cap \mathcal{N}^{sa}} = \mathcal{N}^{sa}.$$

Nachdem geklärt wurde, daß der Definitionsbereich von A dicht im selbstadjungierten Teil der Algebra liegt, soll gezeigt werden, daß A alle selbstadjungierten Elemente aus seinem Definitionsbereich in selbstadjungierte Elemente abbildet. Für Elemente aus E^{sa} wurde das bereits gezeigt.
Zu $x \in D(A) \cap \mathcal{N}^{sa}$, aber $x \notin E^{sa}$, gibt es ein $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$-konvergentes Netz $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset E^{sa}$ mit $x_\lambda \to x$. Aus der $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*) - \sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$-Abgeschlossenheit des Generators A folgt, daß das Netz $\{A(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ in der $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$-Topologie gegen $A(x)$ konvergiert. Für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt $A(x_\lambda) \in \mathcal{N}^{sa}$, also folgt aus der $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$-Abgeschlossenheit des selbstadjungierten Teils der Algebra $A(x) \in \mathcal{N}^{sa}$.

Zu zeigen bleibt, daß der Generator A symmetrisch ist.
Sei $x \in D(A)$, dann existiert ein $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$-konvergentes Netz $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset E$, das gegen x konvergiert. Jedes x_λ kann eindeutig in zwei selbstadjungierte Elemente zerlegt werden: $x_\lambda = u_\lambda + iv_\lambda$, wobei nach dem bereits Gezeigten $u_\lambda, v_\lambda \in E^{sa}$ gilt. Es ist $x_\lambda^* = u_\lambda - iv_\lambda$, und es folgt

$$A(x_\lambda)^* = (A(u_\lambda + iv_\lambda))^* = A(u_\lambda) - iA(v_\lambda) = A(x_\lambda^*).$$

Die $*$-Abbildung ist schwach-$*$-stetig, es ergibt sich

$$\begin{aligned} A(x)^* &= (\text{w}*\text{-lim} A(x_\lambda))^* \\ &= \text{w}*\text{-lim} A(x_\lambda)^* \\ &= \text{w}*\text{-lim} A(x_\lambda^*) \\ &= A(x^*). \end{aligned}$$

Dabei wurde die $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*) - \sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$-Abgeschlossenheit des Generators A und $x_\lambda^* \to x^*$ ausgenutzt.
Also ist mit $x \in D(A)$ auch $x^* \in D(A)$ und es gilt $A(x)^* = A(x^*)$, das heißt, der Generator A ist symmetrisch. □

Die Beweisideen bei den folgenden Ergebnissen sind die gleichen, wie in Kapitel 4. Unterschiede ergeben sich durch die verschiedenen Topologien.

Es wird jetzt gezeigt, daß es ausreicht $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$ und die Symmetrie der Generatoren A einer C_0^*-Halbgruppe zu fordern, damit die Halbgruppe unital und positiv ist.

Satz 5.4 *Sei T_t eine C_0^*-Halbgruppe von Kontraktionen auf $\mathcal{N}$ mit Generator A. Genügt A den Bedingungen*

i) $\mathbb{1} \in D(A), \quad A(\mathbb{1}) = 0,$
ii) A ist symmetrisch,
dann ist T_t eine positive, unitale Halbgruppe.

Beweis : Nach dem Hille-Yosida Theorem existiert die Resolvente $R(\lambda, A) := (\lambda 1 - A)^{-1}$ des Generators A für alle $\lambda > 0$. Die Halbgruppe T_t angewendet auf $x \in \mathcal{N}$ kann über die Resolvente nach folgender Beziehung konstruiert werden:

$$< x_*, T_t(x) >= \lim_{n\to\infty} < x_*, (\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, A))^n(x) > \qquad \forall x_* \in \mathcal{N}_*.$$

Ist $\mathbb{1} \in D(A)$ und $A(\mathbb{1}) = 0$, so erhält man für alle $\lambda > 0$

$$\mathbb{1} = R(\lambda, A)(\lambda 1 - A)(\mathbb{1}) = R(\lambda, A)(\lambda \mathbb{1}) = \lambda R(\lambda, A)(\mathbb{1}),$$

daraus folgt $R(\lambda, A)(\mathbb{1}) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}$. Für die Halbgruppe berechnet man wegen $(\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, A))^n(\mathbb{1}) = (\frac{n}{t})^n(\frac{t}{n})^n(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$:

$$T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}.$$

Für $\lambda > 0$ ist $(\lambda 1 - A)$ symmetrisch, also auch die Resolvente, wie die folgende Überlegung zeigt:
Zu $x \in \mathcal{N}$ gibt es genau ein $y \in D(A)$, so daß $(\lambda 1 - A)^{-1}(x) = y$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned} ((\lambda 1 - A)^{-1}(x))^* &= y^* \\ &= ((\lambda 1 - A)^{-1}(\lambda 1 - A))(y^*) \\ &= (\lambda 1 - A)^{-1}((\lambda 1 - A)(y^*)) \\ &= (\lambda 1 - A)^{-1}(x^*). \end{aligned}$$

Da die $*$-Abbildung schwach-$*$-stetig ist, kann die Symmetrie auf die Halbgruppe übertragen werden.

$$\begin{aligned} T_t(a)^* &= (\text{w}*\text{-lim}_{n\to\infty}[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, A)]^n(a))^* \\ &= \text{w}*\text{-lim}_{n\to\infty}[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, A)]^n(a)^* \\ &= \text{w}*\text{-lim}_{n\to\infty}[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, A)]^n(a^*) \\ &= T_t(a^*). \end{aligned}$$

Sei $a \in \mathcal{N}^+$ mit $\|a\| = 1$. Dann ist $\|\mathbb{1} - a\| \leq 1$ wegen $\sigma(\mathbb{1} - a) = 1 - \sigma(a) \subseteq [0,1]$. Mit der bereits bewiesenen Eigenschaft $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1} - T_t(a)\| &= \|T_t(\mathbb{1}) - T_t(a)\| \\ &\leq \|T_t\|\|\mathbb{1} - a\| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Da T_t symmetrisch ist, bildet T_t die selbstadjungierten Elemente auf die selbstadjungierten ab:

$$T_t(\mathcal{N}^{sa}) \subseteq \mathcal{N}^{sa}, \qquad \forall t > 0,$$

das bedeutet $T_t(a) \in \mathcal{N}^{sa}$. Es ist $\sigma(\mathbb{1} - T_t(a)) \subseteq [-1,1]$ also $\sigma(T_t(a)) \subseteq [0,2]$, das heißt $T_t(a) \in \mathcal{N}^+$.

Für beliebiges, nicht auf eins normiertes $b \in \mathcal{N}^+$ erhält man die Aussage aus

$$T_t(b) = \|b\| T_t(\frac{b}{\|b\|})$$

und der Kegeleigenschaft von $\mathcal{N}^+$. □

Setzt man in Satz 5.3 zusätzlich voraus, daß die Halbgruppe T_t unital für alle $t \geq 0$ ist, so bekommt man wegen $\frac{1}{h}(T_h(\mathbb{1}) - \mathbb{1}) = \frac{1}{h}(\mathbb{1} - \mathbb{1}) = 0$ folgende Aussage:

Korollar 5.5 *Sei T_t eine C_0^*-Halbgruppe von Kontraktionen mit Generator A auf $\mathcal{N}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*
i) A ist symmetrisch, $\mathbb{1} \in D(A)$ und $A(\mathbb{1}) = 0$.
ii) T_t ist positive, unitale Halbgruppe.

Beweis : Folgt aus den Sätzen 5.3 und 5.4. □

Es soll noch gezeigt werden, daß der Definitionsbereich des Generators einer positiven Halbgruppe auch dicht im positiven Kegel liegt.

Satz 5.6 *Sei T_t eine positive C_0^*-Halbgruppe mit Generator A auf $\mathcal{N}$. Dann gilt $\overline{D(A) \cap \mathcal{N}^+} = \mathcal{N}^+$, wobei der Abschluß in der Schwach-$*$-Topologie gebildet wird.*

Beweis : Sei $y \in \mathcal{N}^+$ beliebig, dann existiert nach Bemerkung 5.2 ein Netz $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ aus

$$\begin{aligned} F := \mathrm{span}\{w \in \mathcal{N} \quad : \quad & \exists\phi \in C_0^\infty((0,\infty), I\!R^+), x \in \mathcal{N}, \text{s.d.} \\ & < x_*, w >= \int_0^\infty \phi(s) < x_*, T_s(x) > ds, \quad \forall x_* \in \mathcal{N}_*\}, \end{aligned}$$

das gegen y konvergiert. Jedes y_λ kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{aligned} y_\lambda &= \sum_{k\in I_\lambda} \alpha_\lambda^k \int_0^\infty \phi_\lambda^k(s) T_s(x_\lambda^k) ds \\ &= \sum_{k\in I_\lambda} \int_0^\infty \phi_\lambda^k(s) T_s(z_\lambda^k) ds \end{aligned}$$

mit $z_\lambda^k := \alpha_\lambda^k x_\lambda^k$. Die Indexmengen I_λ sind endlich. Jedes y_λ und z_λ^k kann eindeutig in vier positive Elemente zerlegt werden:

$$\begin{aligned} y_\lambda &= p_\lambda - q_\lambda + i(u_\lambda - v_\lambda), \qquad && p_\lambda, q_\lambda, u_\lambda, v_\lambda \in \mathcal{N}^+, \\ z_\lambda^k &= a_\lambda^k - b_\lambda^k + i(c_\lambda^k - d_\lambda^k), \qquad && a_\lambda^k, b_\lambda^k, c_\lambda^k, d_\lambda^k \in \mathcal{N}^+. \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt, daß $p_\lambda \to y$ konvergiert.

Für alle $s \geq 0$ ist nach Voraussetzung $\phi_\lambda^k(s) T_s(a_\lambda^k) \in \mathcal{N}^+$. Das Integral $\int_0^\infty \phi_\lambda^k(s) T_s(a_\lambda^k) ds$ existiert in der Schwach-$*$-Topologie. Um zu beweisen, daß es positiv ist, muß noch gezeigt werden, daß der positive Kegel schwach-$*$-abgeschlossen ist. Wir zeigen dies, indem wir zuerst beweisen, daß der positive Kegel abgeschlossen in der schwachen Operatortopologie ist. Die Schwach-$*$-Abgeschlossenheit folgt dann, da die Schwach-$*$-Topologie feiner als die schwache Operatortopologie ist.
Sei also $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ein gegen $a \in \mathcal{N}$ in der schwachen Operatortopologie konvergentes Netz positiver Elemente. Im Beweis von Satz 5.3 wurde bereits gezeigt, daß der selbstadjungierte Teil der Algebra in der schwachen Operatortopologie abgeschlossen ist. Jede v. Neumann-Algebra ist Unteralgebra einer Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ von Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Die Positivität von a_λ ist äquivalent zu

$$(\psi, a_\lambda\psi) \geq 0 \qquad \forall\psi \in \mathcal{H}.$$

Die Konvergenz von a_λ gegen a in schwacher Operatortopologie heißt, daß

$$(\phi, a_\lambda\psi) \to (\phi, a\psi) \qquad \forall\phi, \psi \in \mathcal{H}$$

gilt. Daraus folgt dann, daß auch $(\psi, a\psi) \geq 0$ gilt für alle $\psi \in \mathcal{H}$, also ist a positiv.

Insgesamt bedeutet dies, daß das Integral $\int_0^\infty \phi_\lambda^k(s) T_s(a_\lambda^k) ds$ positiv ist, es gilt also

$$p_\lambda = \sum_{k \in I_\lambda} \int_0^\infty \phi_\lambda^k(s) T_s(a_\lambda^k) ds$$

wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in positive Elemente. Damit folgt die Behauptung. □

5.2 Vollständig positive, unitale Halbgruppen

In diesem Abschnitt wird mit $\mathcal{N}$ stets eine v. Neumann-Algebra bezeichnet und mit $\mathcal{M}(n, \mathcal{N})$ die v. Neumann-Algebra der $n \times n$ Matrizen $a = [a_{ij}]$ mit Einträgen $a_{ij} \in \mathcal{N}$. Mit $\Phi^{(n)}$ wird die zu jeder linearen Abbildung $\Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ gehörende Abbildung $\Phi^{(n)} : \mathcal{M}(n, \mathcal{N}) \to \mathcal{M}(n, \mathcal{N})$, $\Phi^{(n)}[a_{ij}] := [\Phi(a_{ij})]$ bezeichnet.
In diesem Abschnitt werden unitale C_0^*-Halbgruppe T_t auf $\mathcal{N}$ untersucht, die vollständig positiv sind $T_t^{(n)}(\mathcal{M}(n, \mathcal{N})^+) \subset \mathcal{M}(n, \mathcal{N})^+$, für alle $n \in I\!N$ und $t \geq 0$. Für die Norm der zugehörigen Halbgruppe $T_t^{(n)}$ erhält man wegen $T_t^{(n)}[\delta_{ij}] = [T_t(\delta_{ij})] = [\delta_{ij}]$ mit Satz 4.1: $\|T_t^{(n)}\| = 1$, da $[\delta_{ij}]$ das Einselement aus $\mathcal{M}(n, \mathcal{N})$ ist.

Die Charakterisierung der Generatoren vollständig positiver, unitaler Halbgruppen auf v. Neumann-Algebren soll wie im C^*-Algebren-Fall auf positive, unitale Halbgruppen zurückgeführt werden. Im folgenden werden einige Eigenschaften der C_0^*-Halbgruppe T_t und ihres Generators A auf die zugehörige Halbgruppe $T_t^{(n)}$ und ihren Generator übertragen. Dafür benötigt man als erstes die Identifizierung des Prädualraums von $\mathcal{M}(n, \mathcal{N})$ mit $\mathcal{M}(n, \mathcal{N}_*)$. Dies geschieht analog zur Identifizierung von $\mathcal{M}(n, \mathcal{N})^*$ mit $\mathcal{M}(n, \mathcal{N}^*)$ [Lan73].

Die Martrizenalgebra $\mathcal{M}(n, \mathcal{N})$ kann mit dem (v. Neumann-) Tensorprodukt von $\mathcal{N}$ und der Matrizenalgebra $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ identifiziert werden, indem jedem Element $x \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ eine

$n \times n$-Matrix $[x_{ij}]$ zugeordnet wird:

$$x = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} \otimes [e_{ij}] =: [x_{ij}].$$

Die $[e_{ij}]$ sind dabei die sogenannten Matrizeneinheiten, die Matrix $[e_{ij}]$ besteht aus einer Eins an der Stelle (i,j) und sonst aus Nullen.
Der Prädualraum von $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ kann folgendermaßen mit $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ identifiziert werden:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(n,\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}(n,\mathbb{C})_* \\ a & \mapsto & < a, \cdot >= Tr(a\cdot). \end{array}$$

Sei $g \in \mathcal{M}(n,\mathcal{N})_*$ beliebig. Für $a \in \mathcal{N}$ definiere $g_{ij} \in \mathcal{N}_*$ durch

$$< g_{ij}, a >:=< g, a \otimes e_{ij} > .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} < g, [a_{ij}] > &= < g, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes e_{ij} > \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} < g_{ij}, a_{ij} > \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} < g_{kl}, a_{ij} >< e_{lk}, e_{ij} > \\ &= < \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} \otimes e_{lk}, [a_{ij}] > . \end{aligned}$$

Wegen dieser Zerlegung von g kann $\mathcal{M}(n,\mathcal{N})_*$ mit $\mathcal{M}(n,\mathcal{N}_*)$ identifiziert werden.

Mit dieser Identifizierung des Prädualraums von $\mathcal{M}(n,\mathcal{N})$ mit $\mathcal{M}(n,\mathcal{N}_*)$ kann die C_0^*-Eigenschaft der Halbgruppe T_t auf die auf der Matrizenalgebra $\mathcal{M}(n,\mathcal{N})$ definierte Halbgruppe $T_t^{(n)}$ übertragen werden.

Lemma 5.7 *Es sei T_t eine C_0^*-Halbgruppe auf $\mathcal{N}$. Dann ist $T_t^{(n)}$ eine C_0^*-Halbgruppe auf $\mathcal{M}(n,\mathcal{N})$, und der Generator von $T_t^{(n)}$ ist $A^{(n)}$. Für dessen Definitionsbereich gilt:*

$$D(A^{(n)}) = \{[a_{ij}] \in \mathcal{M}(n,\mathcal{N}) : a_{ij} \in D(A), 1 \leq i,j \leq n\}.$$

Beweis : Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0} < [x_{ij}^*], T_t^{(n)}[a_{ij}] - [a_{ij}] > &= \lim_{t\downarrow 0} \sum_{i,j=1}^{n} < x_{ij}^*, T_t(a_{ij}) - a_{ij} > \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \lim_{t\downarrow 0} < x_{ij}^*, T_t(a_{ij}) - a_{ij} >= 0,\end{aligned}$$

für alle $[a_{ij}] \in \mathcal{M}(n,\mathcal{N})$ und $[x_{ij}^*] \in \mathcal{M}(n,\mathcal{N}_*)$. Die letzte Gleichheit folgt aus der C_0^*-Eigenschaft von T_t. Genauso erhält man für ein beliebiges Netz $\{[a_{ij}]_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{[a_{ij,\lambda}]\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{M}(n,\mathcal{N})$, das in der Schwach-$*$-Topologie gegen $[a_{ij}] \in \mathcal{M}(n,\mathcal{N})$ konvergiert:

$$< [x_{ij}^*], T_t^{(n)}[a_{ij,\lambda}] - T_t^{(n)}[a_{ij}] >= \sum_{i,j=1}^{n} < x_{ij}^*, T_t(a_{ij,\lambda}) - T_t(a_{ij}) > \to 0,$$

für alle $[x_{ij}^*] \in \mathcal{M}(n,\mathcal{N}_*)$, da $a \mapsto T_t(a)$ für jedes $t \geq 0$ schwach-$*$-stetig ist. Insgesamt folgt also aus der C_0^*-Eigenschaft von T_t die C_0^*-Eigenschaft von $T_t^{(n)}$.

Der Generator der C_0^*-Halbgruppe $T_t^{(n)}$ ist gerade $A^{(n)}$, wenn A der Generator der C_0^*-Halbgruppe T_t ist:

$$\begin{aligned}< [x_{ij}^*], A^{(n)}[a_{ij}] > &= < [x_{ij}^*], [A(a_{ij})] > \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} < x_{ij}^*, A(a_{ij}) > \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \lim_{t\downarrow 0} < x_{ij}^*, \frac{1}{t}(T_t(a_{ij}) - a_{ij}) > \\ &= \lim_{t\downarrow 0} < [x_{ij}^*], \frac{1}{t}(T_t^{(n)}[a_{ij}] - [a_{ij}]) >,\end{aligned}$$

für alle $[x_{ij}^*] \in \mathcal{M}(n,\mathcal{N}_*)$. Der Definitionsbereich von $A^{(n)}$ ergibt sich aus dem von A:

$$D(A^{(n)}) = \{[a_{ij}] \in \mathcal{M}(n,\mathcal{N}) : a_{ij} \in D(A), 1 \leq i,j \leq n\}.$$

□

Mit Hilfe dieser Vorüberlegungen können die Ergebnisse aus Kapitel 5.1 auf den vollständig positiven Fall übertragen werden, wie dies schon bei den Halbgruppen auf C^*-Algebren der Fall war.

Satz 5.8 *Sei T_t eine C_0^*-Halbgruppe von vollständigen Kontraktionen auf $\mathcal{N}$. Der Generator A besitze die Eigenschaften*
i) $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$,
ii) A ist symmetrisch.
Dann ist T_t eine vollständig positive, unitale Halbgruppe.

Beweis : Nach dem vorhergehenden Lemma ist $T_t^{(n)}$ eine C_0^*-Halbgruppe auf $\mathcal{M}(n, \mathcal{N})$ mit Generator $A^{(n)}$. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß $A^{(n)}$ die Voraussetzungen von Satz 5.4 erfüllt.
Sei $n \in I\!N$ beliebig, dann gilt:

$$A^{(n)}[\delta_{ij}] = [A(\delta_{ij})] = 0.$$

Das heißt, daß das Einselement $[\delta_{ij}] \in \mathcal{M}(n, \mathcal{N})$ aus dem Definitionsbereich von $A^{(n)}$ ist und auf die Null abgebildet wird. Da weiterhin jede symmetrische Abbildung vollständig symmetrisch ist, wegen

$$(A^{(n)}[a_{ij}])^* = [A(a_{ij})]^* = [(A(a_{ji}))^*] = [A(a_{ji}^*)] = A^{(n)}([a_{ij}]^*) \quad \forall a_{ij} \in D(A),$$

sind die Voraussetzungen von Satz 5.4 für $A^{(n)}$ erfüllt, also ist $T_t^{(n)}$ eine positive, unitale Halbgruppe auf $\mathcal{M}(n, \mathcal{N})$. Da $n \in I\!N$ beliebig war, ist T_t vollständig positiv und unital. $\square$

Satz 5.9 *Sei T_t eine vollständig positive C_0^*-Halbgruppe auf $\mathcal{N}$. Dann ist der Generator A symmetrisch.*

Beweis : Vollständig positive Halbgruppe sind trivialerweise positiv, die Behauptung folgt also aus Satz 5.3. $\square$

Nimmt man zu den Voraussetzungen des letzten Satzes die Unitalität der Halbgruppe hinzu, so erhält man wegen

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h(\mathbb{1}) - \mathbb{1}) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(\mathbb{1} - \mathbb{1}) = 0$$

folgendes Ergebnis:

Korollar 5.10 *Sei A der Generator der C_0^*-Halbgruppe T_t von vollständigen Kontraktionen auf $\mathcal{N}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*
i) T_t ist vollständig positive und unitale Halbgruppe.
ii) A ist symmetrisch, $\mathbb{1} \in D(A)$ und $A(\mathbb{1}) = 0$.

Beweis : Folgt aus den Sätzen 5.8 und 5.9. □

Auch im Falle der v. Neumann-Algebren kann die folgende Identifizierung vorgenommen werden:

Satz 5.11 *Jede positive, unitale C_0^*-Halbgruppe T_t von vollständigen Kontraktionen auf $\mathcal{N}$ ist vollständig positiv.*

Beweis : Folgt aus den Korollaren 5.5 und 5.10. □

Kapitel 6

Diskussion

Zur Herleitung der Resultate in den Kapiteln 4 und 5 wurde nicht auf frühere Arbeiten über positive Halbgruppen zurückgegriffen. Um einen Vergleich unserer Ergebnisse mit denen anderer Autoren zu ermöglichen, werden hier die relevanten Arbeiten vorgestellt. In den Abschnitten dieses Kapitels werden die Ergebnisse für Halbgruppen mit verschiedenen Eigenschaften diskutiert. Im letzten Abschnitt findet sich eine Zusammenfassung.

6.1 Positive Halbgruppen

Im Falle von normstetigen, positiven Halbgruppen auf C^*-Algebren gibt es mehrere äquivalente Charakterisierungen für die Generatoren. Ein umfassendes Resultat wurde 1979 von Evans und Hanche-Olsen [Eva79] gezeigt:

Satz 6.1 *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und $A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine beschränkte symmetrische Abbildung. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
i) e^{tA} ist für alle $t \geq 0$ positiv.
ii) Die Resolvente $(\lambda 1 - A)^{-1}$ ist für große $\lambda > 0$ positiv.
iii) Ist $y \in \mathcal{A}^+, a \in \mathcal{A}$ mit $ya = 0$, dann gilt $a^*A(y)a > 0$.
iv) $A(x^2) + xA(\mathbb{1})x \geq A(x)x + xA(x)$ für alle $x \in \mathcal{A}^{sa}$.
v) $A(\mathbb{1}) + u^*A(\mathbb{1})u \geq A(u^*)u + u^*A(u)$ für alle unitären $u \in \mathcal{A}$.
vi) Sei S eine volle und invariante Menge von Zuständen auf $\mathcal{A}$. Seien $f \in S$ und $y \in \mathcal{A}^+$, so daß $f(y) = 0$ gilt, dann gilt $f(A(y)) \geq 0$.

Beweis : In [Eva79]. □

Dabei heißt eine Menge S von Zuständen voll, falls aus $x \in \mathcal{A}^{sa}$ und $f(x) \geq 0$ für alle $f \in S$ folgt, daß $x \in \mathcal{A}^+$ ist. S heißt invariant, falls aus $f \in S$, $x \in \mathcal{A}$

und $f(x^*x) \neq 0$ folgt: $f(x^*(\cdot)x)/f(x^*x) \in S$.

Bratteli und Robinson [Bra81b] konnten dieses Ergebnis 1981 auf C_0-Halbgruppen erweitern.

Satz 6.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und T_t eine C_0-Halbgruppe auf $\mathcal{A}$ mit Generator A. Weiterhin sei T_t für alle $t \geq 0$ symmetrisch. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*
i) T_t ist positiv für alle $t \geq 0$.
ii) Die Resolvente $(1 - \epsilon A)^{-1}$ ist positiv für alle kleinen $\epsilon > 0$.
iii) Für alle unitären $u \in \mathcal{A}$ und kleine $\epsilon > 0$ gilt:

$$(1 - \epsilon A)^{-1}(\mathbb{1}) + u^*(1 - \epsilon A)^{-1}(\mathbb{1})u \geq (1 - \epsilon A)^{-1}(u^*)u + u^*(1 - \epsilon A)^{-1}(u).$$

iv) Für alle $a \in \mathcal{A}^{sa}$ und kleine $\epsilon > 0$ gilt:

$$(1 - \epsilon A)^{-1}(a^2) + a(1 - \epsilon A)^{-1}(\mathbb{1})a \geq (1 - \epsilon A)^{-1}(a)a + a(1 - \epsilon A)^{-1}(a).$$

v) $T_\epsilon(a^2) + aT_\epsilon(\mathbb{1})a \geq T_\epsilon(a)a + aT_\epsilon(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}^{sa}$ und kleine $\epsilon > 0$.
vi) $T_\epsilon(\mathbb{1}) + u^*T_\epsilon(\mathbb{1})u \geq T_\epsilon(u^*)u + u^*T_\epsilon(u)$ für alle unitären $u \in \mathcal{A}$ und kleine $\epsilon > 0$.

Beweis : In [Bra81b]. □

Man bemerke, daß aus der Symmetrie von T_t die Symmetrie von A folgt, denn es gilt:

$$\frac{1}{h}(T_h(a^*) - a^*) = \frac{1}{h}(T_h(a)^* - a^*) = \frac{1}{h}(T_h(a) - a)^*.$$

Beachtet man noch die Stetigkeit der $*$-Abbildung, so bekommt man, daß mit $a \in D(A)$ auch a^* im Definitionsbereich liegt und $A(a^*) = A(a)^*$ gilt.

In den Ergebnissen von Evans und Hanche-Olsen wurde die Bedingung ii) an die Resolvente für alle großen positiven λ, bei Bratteli und Robinson äquivalent dazu für alle kleinen $\epsilon > 0$ formuliert. Dies ist folgendermaßen zu verstehen: Für alle $\lambda > 0$ wird der Zusammenhang zwischen Resolvente und Halbgruppe über die Laplacetransformation gegeben:

$$(\lambda 1 - A)^{-1}(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t(x) dt.$$

Ist nun T_t positiv, so auch die Resolvente für alle $\lambda > 0$. In der umgekehrten Richtung kommt man mit weniger aus, es reicht, für große positive λ die Positivität der Resolvente zu fordern, denn es gilt:

$$T_t(x) = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{t}(\frac{n}{t}1 - A)^{-1})^n(x).$$

Die zweite Charakterisierung, die in der Arbeit von Bratteli und Robinson hergeleitet wird, stützt sich auf eine Untersuchung von Phillips [Phi62] aus dem Jahr 1962 über positive Kontraktionshalbgruppen auf Banachverbänden. Das Problem bei der Übertragung auf C^*-Algebren liegt in der unterschiedlichen Ordnungsstruktur. Die positiven Elemente einer C^*-Algbera bilden genau dann einen Verband, wenn die Algebra abelsch ist.

Als normiertes Tangentenfunktional ω_x am Punkt $x \in \mathcal{A}$ wird ein Element aus dem Dualraum bezeichnet, für das gilt:

$$\|\omega_x\| = 1 \quad \text{und} \quad \omega_x(x) = \|x\|.$$

Satz 6.3 *Sei A eine dicht definierte, symmetrische Abbildung auf einer C^*-Algebra. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
i) A ist der Generator einer positiven C_0-Halbgruppe von Kontraktionen auf $\mathcal{A}$.
ii) $(1 - \epsilon A)^{-1}$ ist eine positive Kontraktion für alle $\epsilon > 0$.
iii) Range$(1 - \epsilon A) = \mathcal{A}$ für $\epsilon > 0$, und es gilt mindestens eine der folgenden vier Bedingungen:

a) $\omega_{x^+}(A(x)x + xA(x)) \leq 0$ für alle $x = x^* \in D(A)$, so daß für den positiven Teil x^+ von x gilt: $x^+ \neq 0$.
b) $\omega_{x^+}(A(x)) \leq 0$ für alle $x = x^* \in D(A)$, so daß für den positiven Teil x^+ von x gilt: $x^+ \neq 0$.
c) $y^*A(x)y \leq 0$ für alle $x = x^* \in D(A)$ und $y \in \mathcal{A}^{**}$, so daß $xy = \|x^+\|y$ gilt.
d) $P_xA(x)P_x \leq 0$ für $x = x^* \in D(A)$, wobei $P_x \in \mathcal{A}^{**}$ die maximale Projektion ist, so daß gilt: $xP_x = \|x^+\|P_x$.

Beweis : In [Bra81b]. □

Bratteli und Robinson betrachten bei ihrer Charakterisierung ausschließlich den positiven Aspekt der Halbgruppen. Werden diese Halbgruppen für die

Beschreibung einer Dynamik verwendet, so müssen sie auch unital sein. Da Unitalität und Positivität zwei unabhängige Eigenschaften der Halbgruppe sind, wäre es naheliegend zu erwarten, daß sie sich unabhängig über den Generator charakterisieren lassen. Um so erstaunlicher ist das in Kapitel 4 gewonnene Resultat, das angibt, welche Voraussetzungen an einen Generator gestellt werden müssen, damit er eine positive C_0-Halbgruppe erzeugt. Für den Beweis haben wir vorausgesetzt, daß der Generator symmetrisch ist. Diese Annahme wird auch von Evans und Hanche-Olsen im normstetigen Fall und von Bratteli und Robinson im C_0-Fall gemacht. Wir haben weiterhin vorausgesetzt, daß der Generator die Eigenschaft $\mathbb{1} \in D(A)$ und $A(\mathbb{1}) = 0$ hat. Damit läßt sich die Unitalität der Halbgruppe nachweisen. Interessant ist, daß wir ausschließlich unter Verwendung dieser beiden Annahmen die Positivität der Halbgruppe zeigen konnten. Und zwar impliziert die Symmetrie des Generators, daß die Halbgruppe symmetrisch ist. Mit Hilfe eines Spektralargumentes folgt die Positivität, wobei die schon vorher bewiesene Unitalität ausgenutzt wurde.
Die in dieser Arbeit bewiesene Charakterisierung des Generators einer positiven, unitalen C_0-Halbgruppe ist interessant, da die Voraussetzungen im Vergleich zu den bisher bekannnten Charakterisierungen sehr direkt und einfach nachzuweisen sind. Direkt heißt, daß man bei vorgegebenem Generator A sofort ablesen kann, ob $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$ und A symmetrisch ist. Es muß also kein Umweg über irgendwelche schwer nachzuweisende Eigenschaften, zum Beispiel die der Resolvente, gemacht werden.

Außer in der Arbeit von Bratteli und Robinson sind bislang stets nur positive, normstetige Halbgruppen untersucht worden. Es ist daher nicht erstaunlich, daß keine Fragen bezüglich des Definitionsbereichs behandelt worden sind. Normstetige Halbgruppen haben beschränkte, auf dem ganzen Raum definierte Generatoren. Eine Betrachtung der Definitionsbereiche ist daher in diesem Fall überflüssig. Bei den nicht-normstetigen Halbgruppen ist eine Behandlung aber notwendig, da, wie in Kapitel 4 gezeigt worden ist, der selbstadjungierte Teil der C^*-Algebra und der positive Kegel kein Inneres in der Normtopologie besitzen.

6.2 Vollständig positive, unitale Halbgruppen

Normstetige, vollständig positive, unitale Halbgruppen sind sehr ausführlich untersucht worden. Zuerst wurden diese dynamischen Halbgruppen zeitgleich, aber unabhängig voneinander, von Gorini, Kossakowski, Sudarshan [Gor76] und von Lindblad [Lin76] untersucht.
Die dabei anstelle der Positivität vorausgesetzte vollständige Positivität wurde folgendermaßen motiviert:
Man betrachtet ein quantenmechanisches System S, daß an ein Wärmebad W gekoppelt ist. Der Hilbertraum des Gesamtsystems ist das Tensorprodukt $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_W$ der zu S und W gehörenden Hilberträume. Es wird angenommen, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ der Anfangszustand des Gesamtsystems als Produktzustand $\rho \otimes \sigma$, $\rho \in L^1(\mathcal{H}_S)$ und $\sigma \in L^1(\mathcal{H}_W)$, präpariert werden kann. Mit $U_t = e^{-itH_{tot}}$ werde die reversible Hamiltondynamik auf dem gesamten System bezeichnet. H_{tot} ist der Hamiltonoperator des Gesamtsystems. Für $a \otimes \mathbb{1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_W)$ ist die reduzierte Dynamik $\phi_t : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ folgendermaßen gegeben:

$$Tr_{S+W}\{(\rho \otimes \sigma)(U_t^{-1}(a \otimes 1)U_t)\} = Tr_S\{\rho(\phi_t(a))\},$$

dabei ist Tr_S die Spur auf $L^1(\mathcal{H}_S)$. Es kann gezeigt werden, daß die so erhaltene Dynamik ϕ_t vollständig positiv ist [Lin76].
Diese partielle Mittelung über das Wärmebad W kann als bedingte Erwartung von einer v. Neumann-Algebra $\mathcal{N}$, die das Gesamtsystem repräsentiert, auf die v. Neumann-Unteralgebra $\mathcal{M}$ von $\mathcal{N}$, die das Teilsystem S repräsentiert, aufgefaßt werden. Solch eine bedingte Erwartung wird folgendermaßen definiert:

Definition 6.4 *Seien $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ v. Neumann-Algebren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so daß $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ gilt. Die Abbildung $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ heißt bedingte Erwartung, falls gilt:*
i) $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$,
ii) $\phi(asb) = a\phi(s)b$, $s \in \mathcal{N}, a, b \in \mathcal{M}$.

Aus diesen Eigenschaften kann gefolgert werden, daß die bedingte Erwartung eine Projektion mit Norm 1 ist [Kad86], 11.2. Mit einem Satz von Tomiyama [Tom57] folgt, daß die bedingte Erwartung eine vollständig positive Abbildung ist.

Die Ansicht, daß die angeführten Gründe ausreichen, um ausschließlich vollständig positive, unitale Halbgruppen zu behandeln, wird nicht von allen Autoren geteilt. Bratteli und Robinson vertreten die Meinung [Bra81a], S. 229, daß der wahre Grund, vollständig positive statt positive Abbildungen zu betrachten, darin liegt, daß der Satz von Stinespring, Satz 2.9, eine weniger schwierige Handhabbarkeit erstgenannter Abbildungen ermöglicht.
In diesem Zusammenhang sind die in Kapitel 4.2 und 5.2 erzielten Ergebnisse interessant, wo wir nachweisen konnten, daß jede unitale, positive Halbgruppe von vollständigen Kontraktionen bereits vollständig positiv ist. Denn die notwendigen Bedingungen an einen Generator A, damit dieser eine positive, unitale Halbgruppe erzeugt, lassen sich auf den auf der Matrizenalgebra $\mathcal{M}(n, \mathcal{A})$ definierten Generator $A^{(n)}$ übertragen. Das bedeutet also, daß diese Generatoren a priori vollständig positive, unitale Halbgruppen erzeugen. Wir haben auch die umgekehrte Richtung gezeigt: Ist die Halbgruppe positiv und unital, dann gilt: $\mathbb{1} \in D(A)$, $A(\mathbb{1}) = 0$ und A ist symmetrisch.

Die Generatoren normstetiger, vollständig positiver, unitaler Halbgruppen können explizit dargestellt werden. Dieses Ergebnis, der sogenannte Satz von Gorini, Kossakowski, Lindblad und Sudarshan, wurde 1978 von Evans und Christensen [Chr79] in der endgültigen Form bewiesen. Wir geben zuerst die Formulierung für C^*-Algebren an:

Satz 6.5 *Sei T_t eine normstetige, vollständig positive, unitale Halbgruppe auf einer C^*-Algebra $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$. Dann existiert eine vollständig positive Abbildung Φ von $\mathcal{A}$ in den schwachen Abschluß $\overline{\mathcal{A}}$ und ein selbstadjungiertes $h \in \overline{\mathcal{A}}$, so daß der Generator A von T_t die folgende Form hat:*

$$A(a) = i[h, a] - \frac{1}{2}\{\Phi(\mathbb{1}), a\} + \Phi(a),$$

dabei bezeichnet $\{.,.\}$ den Antikommutator.

Beweis : In [Chr79]. □

Auf v. Neumann-Algebren erhält man:

Satz 6.6 *Sei T_t eine normstetige C_0^*-Halbgruppe mit Generator A auf der v. Neumann-Algebra $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Es gelte weiterhin $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
i) T_t ist vollständig positiv für alle $t \geq 0$.
ii) Es existiert ein selbstadjungiertes $h \in \mathcal{N}$ und eine Menge $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I\!N} \subset$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$, so daß für alle $a \in \mathcal{N}$ die Reihe $\sum_{\alpha \in I\!N} v_\alpha^* a v_\alpha \in \mathcal{N}$ ist und der Generator A die Darstellung

$$A(a) = i[h, a] + \sum_{\alpha \in I\!N} v_\alpha^* a v_\alpha - \{\sum_{\alpha \in I\!N} v_\alpha^* v_\alpha, a\}$$

besitzt.

Beweis : In [Chr79]. □

Für nicht-normstetige, vollständig positive, unitale Halbgruppen konnte bislang keine allgemeine Darstellung des Generators angegeben werden. Dies verwundert nicht, wenn man die hier vorliegende Situation mit der der einparametrigen $*$-Automorphismengruppen auf C^*- oder v. Neumann-Algebren vergleicht. Diese sollen im nächsten Abschnitt besprochen werden.

6.3 Einparametrige $*$-Automorphismengruppen

Die einparametrigen $*$-Automorphismengruppen sind wichtige Spezialfälle der vollständig positiven, unitalen Halbgruppen. Die reversible Dynamik eines physikalischen Systems ist gerade durch eine einparametrige $*$-Automorphismengruppe gegeben. Jeder $*$-Automorphismus α ist wegen der Verträglichkeit mit der Multiplikation und der $*$-Operation in der Algebra unital und positiv. Denn zu $a \in \mathcal{A}^+$ existiert ein $b \in \mathcal{A}$, so daß $a = b^*b$ gilt, und man erhält

$$\alpha(a) = \alpha(b^*b) = \alpha(b)^*\alpha(b) \quad \in \mathcal{A}^+.$$

α ist sogar vollständig positiv, wie folgende Rechnung zeigt:
Seien $[a_{ij}], [b_{kl}] \in \mathcal{M}(n, \mathcal{A})$, dann ist

$$\begin{aligned} \alpha^{(n)}([a_{ij}][b_{kl}]) &= \alpha^{(n)}[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}] \\ &= [\sum_{j=1}^{n} \alpha(a_{ij})\alpha(b_{jl})] \\ &= \alpha^{(n)}([a_{ij}])\alpha^{(n)}([b_{kl}]). \end{aligned}$$

Setzt man jetzt für $[a_{ij}]$ die Matrix $[b_{ij}]^*$ ein, so erhält man, daß $\alpha^{(n)}$ für beliebige $n \in I\!N$ positiv ist.

In der Darstellung des Generators einer normstetigen, vollständig positiven, unitalen Halbgruppe ist einer der vorkommenden Terme ein Kommutatorterm $i[h, \cdot]$. Derartige Terme sind dargestellte Derivationen, wobei diese die Generatoren der einparametrigen, normstetigen $*$-Automorphismengruppen sind.

Definition 6.7 *Eine symmetrische Derivation δ auf einer v. Neumann-Algebra $\mathcal{N}$ (bzw. C^*-Algebra) ist eine lineare Abbildung von einer $*$-linearen Unteralgebra $D(\delta)$, dem Definitionsbereich von δ, nach $\mathcal{N}$ mit den Eigenschaften:*
i) $\delta(a)^* = \delta(a^*), \qquad a \in D(\delta).$
ii) $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \qquad a, b \in D(\delta).$

Stimmt der Definitionsbereich $D(\delta)$ mit $\mathcal{N}$ überein, so ist die Derivation δ beschränkt [Bra87], 3.2.23.
Beschränkte Derivationen lassen sich folgendermaßen darstellen:

Satz 6.8 *Sei δ eine ganz auf der v. Neumann-Algebra $\mathcal{N}$ (bzw. C^*-Algebra) definierte symmetrische Derivation, dann existiert (zu jeder Darstellung π von $\mathcal{N}$) ein selbstadjungiertes Element $h \in \mathcal{N}$ ($h \in \pi(\mathcal{N})''$), so daß $\|h\| \leq \frac{1}{2}\|\delta\|$ und*

$$\delta(a) = i[h, a] \qquad \forall a \in \mathcal{N}$$
$$(\pi(\delta(a)) = i[h, \pi(a)] \qquad \forall a \in \mathcal{N})$$

gilt.

Beweis : in [Bra87], 3.2.48. □

Der nächste Satz sagt aus, daß Derivationen die Generatoren einparametriger Gruppen von $*$-Automorphismen sind.

Satz 6.9 *Sei δ eine lineare Abbildung auf der v. Neumann-Algebra $\mathcal{N}$ (bzw. C^*-Algebra). Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
i) δ ist eine auf ganz $\mathcal{N}$ definierte symmetrische Derivation.
ii) δ ist der Generator einer normstetigen einparametrigen Gruppe T_t von $*$-Automorphismen auf $\mathcal{N}$.
In diesem Fall existiert (zu jeder Darstellung π von $\mathcal{N}$) ein selbstadjungiertes Element $h \in \mathcal{N}$ ($h \in \pi(\mathcal{N})''$), so daß

$$T_t(a) = e^{ith} a e^{-ith}$$
$$(\pi(T_t(a)) = e^{ith} \pi(a) e^{-ith})$$

für alle $a \in \mathcal{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis : in [Bra87], 3.2.49. □

Die Behandlung nicht-normstetiger einparametriger Gruppen von $*$-Automorphismen auf C^*- und v. Neumann-Algebren ist wesentlich schwieriger, da es unter anderem keine explizite Darstellungen der Generatoren mehr gibt. Aus diesem Grund ist es nicht verwunderlich, daß auch bei den vollständig positiven, unitalen, nicht-normstetigen Halbgruppen, die allgemeiner als die einparametrigen $*$-Automorphismengruppen sind, keine Darstellung der Generatoren bekannt ist.

Bei den $*$-Automorphismengruppen gibt es allerdings eine weitreichende Charakterisierung der Generatoren, die hier in kompakter, dem Buch von Bratteli und Robinson [Bra87] zu entnehmender Form wiedergegeben wird. Für den C^*-Fall erhält man das folgende Ergebnis:

Satz 6.10 *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und δ eine norm-dicht definierte und norm-abgeschlossene lineare Abbildung auf $\mathcal{A}$ mit Definitionsbereich $D(\delta)$. δ ist genau dann der infinitesimale Generator einer stark stetigen einparametrigen Gruppe von $*$-Automorphismen auf $\mathcal{A}$, wenn mindestens eines der Kriterien in jeder der Gruppen (A), (B) und (C) erfüllt ist, mit Ausnahme der Kombinationen ((A2),(B2),(C2)) und ((A3),(Bj),(C2)) für $j = 1, 2, 3$:*
(A1) $D(\delta)$ ist eine $*$-Algebra und δ eine symmetrische Derivation.
(A2) $\mathbb{1} \in D(\delta)$ und $\delta(\mathbb{1}) = 0$.
(A3) $\mathbb{1} \in D(\delta)$ und $\delta(\mathbb{1}) \in \mathcal{A}^{sa}$.
(B1) $(1 + \alpha\delta)(D(\delta)) = \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
(B2) δ hat eine dichtliegende Menge analytischer Elemente.
(B3) Die selbstadjungierten, analytischen Elemente von δ liegen dicht in $\mathcal{A}^{sa}$.
(C1) $\|(1 + \alpha\delta)(x)\| \geq \|x\|$, für $\alpha \in \mathbb{R}, x \in D(\delta)$.
(C2) Aus $(1 + \alpha\delta)(x) \leq 0$ $\alpha \in \mathbb{R}, x \in D(\delta)$ folgt, daß $x \in \mathcal{A}^+$ gilt.
(C3) Zu jedem $x \in D(\delta)$ existiert ein Tangentenfunktional $\omega_x \neq 0$, so daß $Re(\omega_x(\delta)x) \leq 0$ und $Re(\omega_x(-\delta)x) \leq 0$.

Beweis : In [Bra87], 3.2.50. □

Dabei heißt ein Element $x \in \mathcal{A}$ für einen Abbildung δ auf $\mathcal{A}$ analytisch, falls $a \in \cap_{n\in\mathbb{N}} D(\delta^n)$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!}\|\delta(a)\| < \infty$ gilt.

Für schwach-$*$-stetige $*$-Automorphismengruppen auf v. Neumann-Algebren erhält man:

Satz 6.11 *Sei $\mathcal{N}$ eine v. Neumann-Algebra und δ eine $\sigma(\mathcal{N},\mathcal{N}_*)$-dicht definierte und $\sigma(\mathcal{N},\mathcal{N}_*)-\sigma(\mathcal{N},\mathcal{N}_*)$-abgeschlossene lineare Abbildung auf $\mathcal{N}$ mit Definitionsbereich $D(\delta)$, so daß $\mathbb{1} \in D(\delta)$ gilt.*
δ ist genau dann Generator einer schwach-$*$-stetigen einparametrigen Gruppe von $*$-Automorphismen auf $\mathcal{N}$, falls (A) und jeweils mindestens eines der Kriterien aus den Gruppen (B) und (C) erfüllt ist:
(A) $D(\delta)$ ist $*$-Algebra und δ eine symmetrische Derivation.
(B1) $(1+\alpha\delta)(D(\delta)) = \mathcal{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
(B2) Die Menge aller analytischen Elemente von δ liegt schwach-$*$-dicht in $\mathcal{N}$.
(C1) $\|(1+\alpha\delta)(a)\| \geq \|a\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}, a \in D(\delta)$.
(C2) Aus $(1+\alpha\delta)(a) \geq 0$ für $a \in D(\delta)$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $a \in \mathcal{N}^+$.

Beweis : In [Bra87], 3.2.51. □

6.4 Halbgruppen mit $T_t(\mathbb{1}) \leq \mathbb{1}$

Halbgruppen mit $T(\mathbb{1}) \leq \mathbb{1}$ wurden zuerst von Davies [Dav77], allerdings im Schrödingerbild auf dem reellen Banachraum aller selbstadjungierten Spurklasseoperatoren betrachtet. Diese Halbgruppen werden nicht zur Beschreibung einer Dynamik verwendet, da die Wahrscheinlichkeitserhaltung verloren geht. Anwendungen ergeben sich zum Beispiel, wenn $Tr(\rho\cdot)$ nicht mehr als Wahrscheinlichkeit, sondern als Teilchenzahl [Dav77] oder als nicht konservativer Markovprozeß interpretiert wird.

Halbgruppen dieser Art werden in letzter Zeit vermehrt betrachtet, für einen Überblick sei auf [Hol95] verwiesen. Wir wollen hier ein für uns interessantes Ergebnis von Chebotarev und Fagnola [Che93] wiedergeben, in dem Bedingungen angegeben werden, wann ein 'verallgemeinerter' Generator Halbgruppen erzeugt, die vollständig positiv und unital sind. Es werden allerdings keine allgemeinen v. Neumann-Algebren betrachtet. Ihre Untersuchung ist auf den Spezialfall $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ beschränkt. Es wird sich zeigen müssen, ob die vielen Voraussetzungen, die gemacht werden, in Anwendungen verifizierbar sind.

Satz 6.12 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $G : D(G) \to \mathcal{H}$ der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe P_t auf $\mathcal{H}$. Der Definitionsbereich der Operatoren $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beinhalte eine dichte Teilmenge $D \subset D(G) \subset \mathcal{H}$, so* *daß D ein determinierender Bereich für G ist. Es gelte weiterhin für alle $\phi, \psi \in D$:*

$$(\psi, G\phi) + (G\psi, \phi) + \sum_{n\in\mathbb{N}} (V_n\psi, V_n\phi) = 0.$$

Sei L durch die folgende Sesquilinearform auf $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich D gegeben:

$$(\psi, L(x)\phi) := (\psi, xG\phi) + (G\psi, x\phi) + \sum_{n\in\mathbb{N}} (V_n\psi, xV_n\phi) \quad \forall x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Es existiere ein positiver, selbstadjungierter Operator C, so daß der Definitionsbereich $D(C^{\frac{1}{2}})$ die dichte Teilmenge D umfaßt und für alle $\phi, \psi \in D$ gilt:

$$-(\psi, G\phi) - (G\psi, \phi) = (C^{\frac{1}{2}}\psi, C^{\frac{1}{2}}\phi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (V_n\psi, V_n\phi).$$

Desweiteren existiere für alle $u \in D(G^2)$ eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus D, so daß

$$\lim_{n\to\infty} C^{\frac{1}{2}}Gu_n = C^{\frac{1}{2}}Gu.$$

Es existiere schließlich eine positive Konstante b, so daß gilt:
i) $-2\Re e(Gu, C^{-1}u) \leq b\|u\|^2$ für alle $u \in D$,
ii) für alle $u \in D$ und alle $\epsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned}&(C^{\frac{1}{2}}Gu, C^{\frac{1}{2}}u) + (C^{\frac{1}{2}}u, C^{\frac{1}{2}}Gu)\\ &+ \sum_{n\in\mathbb{N}} (V_nu, C(1+\epsilon C)^{-1}V_nu) \leq b\|C^{\frac{1}{2}}\|^2.\end{aligned}$$

Sind diese Annahmen erfüllt, so ist eine Halbgruppe T_t, die

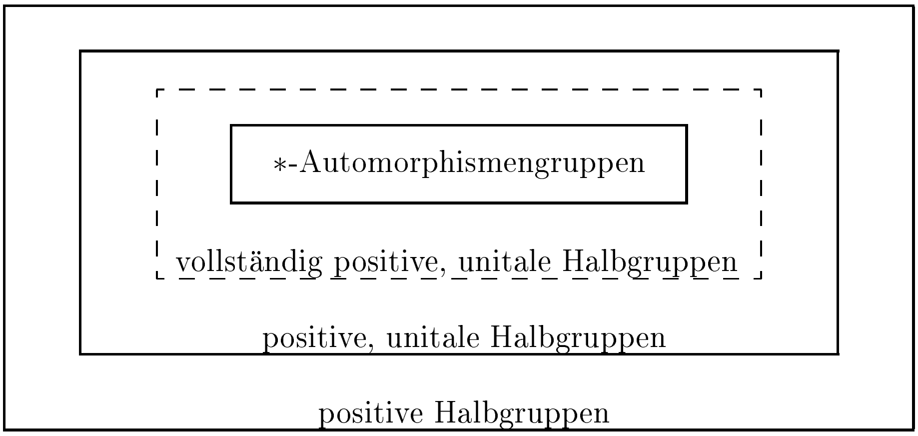
$$(\psi, T_t(x)\phi) = (\psi, x\phi) + \int_0^t (\psi, L(T_s(x))\phi)ds, \quad x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

für alle $\psi, \phi \in D$ erfüllt, eine unitale, vollständig positive C_0^*-Halbgruppe auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Beweis : In [Che93]. □

6.5 Zusammenfassung

Die Diskussion in den Abschnitten 6.1 bis 6.3 soll jetzt zusammengefaßt werden. Die Situation läßt sich folgendermaßen veranschaulichen:



Im normstetigen Fall hat man für einparametrige ∗-Automorphismengruppen eine explizite Darstellung. Ebenso kann für unitale, vollständig positive Halbgruppen eine explizite Darstellung angegeben werden. Für positive Halbgruppen gibt es keine Darstellung mehr, sondern nur die Charakterisierung von Evans und Hanche-Olsen.

Im C_0- bzw. C_0^*-Fall gibt es für keine der oben betrachteten Halbgruppen eine Darstellung. Allerdings existieren gute Charakterisierungen für die Generatoren der einparametrigen ∗-Automorphismengruppen. Eine leicht handhabbare Charakterisierung für unitale, positive bzw. vollständig positive Halbgruppen wurde in dieser Arbeit angegeben. Für positive Halbgruppen gibt es die Charakterisierung von Bratteli und Robinson.

Literaturverzeichnis

[Bra81a] Bratteli, O., Robinson, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2*, Springer Verlag, Berlin (1981)

[Bra81b] Bratteli, O., Robinson, D. W.: Positiv C_0-semigroups on C^*-algebras, *Math. Scand.* **49**, 259 (1981)

[Bra87] Bratteli, O., Robinson, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1, sec. ed.*, Springer Verlag, Berlin (1987)

[Che93] Chebotarev, A. M., Fagnola, F.: Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups, *J. of Funct. Anal.* **118**, 131 (1993)

[Chr79] Christensen, E., Evans, D. E.: Cohomolgy of operator algebras and quantum dynamical semigroups, *J. London Math. Soc.* **20**, 358 (1979)

[Dav73] Davies, E. B.: The harmonic oscillator in a heat bath, *Commun. Math. Phys.* **33**, 171 (1973)

[Dav74] Davies, E. B.: On the markovian master equations, *Commun. Math. Phys.* **39**, 81 (1974)

[Dav76] Davies, E. B.: *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, New York (1976)

[Dav77] Davies, E. B.: Quantum dynamical semigroups and the neutron diffusion equation, *Rep. Math. Phys.* **11**, 169 (1977)

[Eva79] Evans, D. E., Hanche-Olsen, H.: The generators of positive semigroups, *J. Funct. Anal.* **32**, 207 (1979)

[Gor76] Gorini, V., Kossakowski, A., Sudarshan, E. C. G.: Completely positive dynamical semigroups of N-level systems, *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976)

[Hol95] Holevo, A. S.: On the structure of covariant dynamical semigroups, *J. Funct. Anal.*, **131**, 255 (1995)

[Ing75] Ingarden, R. S., Kossakowski, A.: On the connection of nonequilibrium information thermodynamics with non-Hamilton quantum mechanics of open systems, *Ann. Phys.* **89**, 451 (1975)

[Isa95] Isar, A.: Density operator and entropy of the damped quantum harmonic oscillator, *Helv. Phys. Acta* **68**, 225 (1995)

[Kad86] Kadison, R. V., Ringrose, J. R.: *Fundamentals in the Theory of Operator Algebras, Vol. II*, Academic Press, Orlando (1986)

[Lan73] Lance, E. C.: On nuclear C^*-Algebras, *J. Funct. Anal.*, **12**, 157 (1973)

[Lin76] Lindblad, G.: On the generators of quantum dynamical semigroups, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119 (1976)

[Par92] Parthasarathy, K. R.: *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Birkhäuser Verlag, Basel (1992)

[Paz83] Pazy, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York (1983)

[Phi62] Phillips, R. S.: Semigroups of positive contraction operators, *Czechoslovak. Math. J.* **12**, 299 (1962)

[Pul74] Pulè, J. V.: The Bloch Equations, *Commun. Math. Phys.* **38**, 241 (1974)

[Sti55] Stinespring, W. F.: Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6**, 211 (1955)

[Tak79] Takesaki, M.: *Theory of Operator Algebras 1*, Springer Verlag, Berlin (1979)

[Thi80] Thirring, W.: *Lehrbuch der Mathematischen Physik 4*, Springer Verlag, Wien (1980)

[Tom57] Tomiyama, J.: On the projections of norm one in W^*-Algebras, *Proc. Japan Acad.* **33**, 608 (1957)

Lebenslauf

26.3.1969	Geboren in Tübingen
1975 - 1979	Besuch der Adolf-Reichwein-Grundschule in Göttingen
1979 - 1988	Besuch des Theodor-Heuss-Gymnasiums in Göttingen
Januar 1989 - Mai 1989	Zivildienst im Krankenhaus Neu Bethlehem in Göttingen
Oktober 1989	Beginn des Physikstudiums an der Georg-August-Universität Göttingen
Oktober 1991	Diplomvorprüfung
Ab Mai 1993	Diplomarbeit bei Prof. H.J.Roos am Institut für Theoretische Physik. Arbeitsgebiet: Mathematische Physik und Statistische Mechanik
Juni 1995	Diplomprüfung in Physik
Seit Juli 1995	Promotionsstudium bei Prof. H. Hering am Institut für Mathematische Stochastik
Seit April 1996	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematische Stochastik