EINE INVARIANZEIGENSCHAFT BROWNSCHER BEWEGUNG UND TRANSFORMATIONEN DER FEYNMAN - KAC - FORMEL

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der mathematisch - naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Olaf Wittich
aus Kassel

Göttingen 1997

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

D7

Referent: Prof. Dr. H. Hering

Korreferent: Prof. Dr. M. Denker

Tag der mündlichen Prüfung: 19.06.1997

Inhalt.

0. Einleitung, Motivation.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit folgendem Phänomen: Unter Umständen gibt es zu einem gegebenen quantenmechanischen System ein zunächst völlig anders aussehendes korrespondierendes System, das wesentliche Informationen über das ursprüngliche System enthält. Dies soll bedeuten, dass die Berechnung von Matrixelementen in dem ursprünglichen System zurückgeführt werden kann auf die Berechnung von Matrixelementen in dem dazu konstruierten neuen. Diese Korrespondenz kann nichttrivial sein und ist vor allem dann interessant, wenn etwa die Matrixelemente des neuen Systems exakt bekannt oder doch wenigstens näherungsweisen Berechnungen besser zugänglich sind, als die des alten.

In dieser Arbeit werden nur bestimmte Fälle untersucht, nämlich exakte Korrespondenzen solcher quantenmechanischer Systeme, deren Dynamik durch die Schrödingergleichung mit einem skalaren Potential beschrieben wird. Da Lösungen dieser Gleichung durch Erwartungswerte von Funktionalen Brownscher Bewegung darstellbar sind, kommt heraus, dass man eine Invarianzeigenschaft von Brownscher Bewegung benutzen kann, um ein im obigen Sinne korrespondierendes System zu konstruieren. Dieses wird beschrieben durch die Schrödingergleichung zu einem anderen Potential, das im Folgenden das ¨duale ¨ genannt wird. Bis auf eine noch zu erläuternde Schwierigkeit, die mit einem analytischen Fortsetzungsproblem zu tun hat, ergibt sich eine Korrespondenz im obigen Sinne. Das in dieser Hinsicht zentrale Resultat ist (4.10). Als Illustration des verfolgten Konzeptes betrachtet man am besten Beispiel (4.12.2), die Dualität zwischen dreidimensionalem Coulombpotential und vierdimensionalem harmonischen Oszillator. Da bei der Herleitung dieser Dualität nur intrinsische Eigenschaften der Brownschen Bewegung benutzt werden, kann man die dortige Rechnung auch als eine Lösung des Pfadintegrals für das Wasserstoffatom auffassen.

Zunächst wird an die stochastische Beschreibung von Lösungen der Schrödinger- und Wärmeleitungsgleichung erinnert.

0.1 Feynman-Kac-Formel. Das Anfangswertproblem 1.Art für die Wärmeleitungsgleichung mit Potential

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u - Vu$$

besteht aus dem Auffinden einer Funktion $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $u(x,0) = u_0(x)$. Unter den Voraussetzungen $V \in C_b(\mathbb{R}^d)$ stetig und beschränkt und $u_0 \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger findet sich ein einfacher Beweis der Feynman-Kac-Formel

$$u(x,t) = E\left[\exp\left(-\int_0^t V(B_s^x(\omega))ds\right) u_0(B_t^x(\omega))\right]$$

zum Beispiel in [16]. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung läßt sich also als Erwartungswert eines Funktionals von Brownscher Bewegung berechnen.

0.2 Wärmeleitungsgleichung und Schrödingergleichung. Ist der Operator

$$A_V = \frac{1}{2}\Delta - V$$

wesentlich selbstadjungiert auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, so ist er der Generator einer C_0-Halbgruppe

$$T_t : \mathbb{R}_0^+ \times L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$$

[20]. Ist etwa $V \geq c$ nach unten beschränkt, so kann die Resolvente des Generators für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{H}^+(c) := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > c\}$ durch das Integral

$$R_V(\varphi)(x, z) := \int_0^\infty dt\ e^{-zt}(T_t\varphi)(x)$$

ausgedrückt werden. Die so erhaltene Resolventenfunktion ist holomorph in $\mathbb{H}^+(c)$. Für festes $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $R_V(\varphi) \in H^2$ eine Hardy-Lebesgue-Klasse-Funktion. Deshalb folgt aus dem Paley-Wiener-Theorem, dass eine Funktion $g_\varphi(x, it) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ existiert mit

$$\lim_{\epsilon\to 0} R_V(\varphi)(x, \epsilon + it) = g_\varphi(x, it)$$

in L^2-Norm [20]. g_φ ist Lösung der zu A_V gehörenden Schrödingergleichung

$$-i\partial_t\psi = A_V\psi$$

im Impulsbild. Vergleiche dazu auch [20], sowie [13], p.495 ff.

In physikalischen Anwendungen geht es oft darum, Übergangsamplituden auszurechnen, d.h. zu gegebenen Zuständen $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und gegebener Zeitdifferenz $t - t_0$ wird die Größe

$$A_{\varphi,\psi}(t) := (\psi, e^{-iA_V(t-t_0)}\varphi)$$

gesucht. Bezeichnet $\tilde{\psi}$ die Fouriertransformierte von ψ, so ist

$$A_{\varphi,\psi}(t) = \lim_{\epsilon\to 0}(\tilde{\psi}, R_V(\varphi)(\epsilon + it)).$$

Physikalisch entspricht dieser Ausdruck einem Pfadintegral in Impulsdarstellung.

0.3 Inhalt. Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch die in dem Buch von H. Kleinert [12] zur Berechnung von Pfadintegralen benutzten Transformationen. Im stochastischen Rahmen stellt sich heraus, dass diese eine Invarianzeigenschaft von Brownscher Bewegung ausnutzen: Eine durch einen harmonischen Morphismus abgebildete zeittransformierte Brownsche Bewegung ist in Verteilung wieder zu einer Brownschen Bewegung äquivalent. Dies ist die lokale Form der bekannten globalen "Eichinvarianz"

$$\lambda B_t \sim B_{\lambda^2 t}$$

($\sim$ bedeutet Äquivalenz in Verteilung).

Mit Hilfe dieser Invarianzeigenschaft, die in (1.4) präzisiert wird, lassen sich Beziehungen herstellen zwischen den Lösungen des Anfangswertproblems zu verschiedenen Potentialen.

Das Hauptresultat (4.10) besagt folgendes: Vorausgesetzt, es existiert ein passender harmonischer Morphismus Φ, dann lässt sich die Lösung des Anfangswertproblems 1.Art zu einem Potential V und der Anfangsbedingung $u_0(x)$ im Prinzip auf die Lösung des gleichen Problems für ein in diesem Sinne duales Potential $W = \frac{1}{V \circ \Phi}$ zu einer anderen Anfangsbedingung $\Phi^* u_0$, die von Φ und u_0 abhängt (siehe (4.9)), zurückführen. Die hübsche Floskel ¨im Prinzip¨ verdeckt hierbei allerdings ein nicht zu unterschätzendes Problem. Um diese duale Beschreibung zu erreichen, wird nämlich wie folgt vorgegangen:

Zunächst muss man zur Resolvente übergehen. Die Integralformel für die Resolvente besitzt den zusätzlichen (zeitlichen) Freiheitsgrad, den man ausnutzen kann, um die zufälligen Zeittransformationen, die die Änderung der quadratischen Variation des Prozesses durch die Abbildung wieder kompensieren, zwanglos einzubringen. Als nächstes wird eine weitere komplexe Kopplungskonstante, ein zusätzlicher Faktor vor dem Potential, eingeführt. Nach Fixierung einer Anfangsbedingung ergibt sich eine von zwei komplexen Parametern abhängige Resolventenfunktion. Entscheidend ist nun, dass sich diese Funktion in einem Bereich $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}^2$ durch eine konvergente Integralformel darstellen lässt und in diesem Gebiet holomorph ist.

In diesem Gebiet lassen sich nun Identitäten zwischen den Integralformeln für verschiedene Potentiale herleiten. Diese Identitäten setzen sich auf jedes einfach zusammenhängende Holomorphiegebiet, das $\mathbb{K}$ enthält, fort.

Um aber aus der so definierten Resolventenfunktion rückwirkend wieder die Lösungen der Schrödinger- bzw. Wärmeleitungsgleichung zu erhalten, muss man im Allgemeinen diese Funktionen in Gebiete analytisch fortsetzen, die von $\mathbb{K}$ weit entfernt sind. Außer in den Fällen, wo für eines der beiden dualen Potentiale exakte Lösungen bekannt sind (wie in (6.20)), ist dies ein schwieriges Problem, das hier nicht behandelt wird.

Stattdessen werden im folgenden Verlauf der Arbeit zunächst durch die Betrachtung h-harmonischer Morphismen die möglichen Eichsymmetrien erweitert:

Ein durch einen h-harmonischen Morphismus abgebildeter und anschließend zeittransformierter h-Prozess ist in Verteilung zu einer Brownschen Bewegung äquivalent. Der h-Prozess wird durch eine stochastische Differentialgleichung gegeben und seine Verteilung besitzt eine explizit angebbare Dichte bezüglich des Wienermaßes. Es zeigt sich, dass die quasikonforme Änderung der Metrik mit Hilfe von h äquivalent ist zur Betrachtung eines zusätzlichen Potentials in der Feynman-Kac-Formel.

Um schließlich auch noch direkte Aussagen über die Greenfunktionen (Propagatoren) der Wärmeleitungsgleichung machen zu können, werden die möglichen Anfangsbedingungen auf bestimmte ¨zulässige¨ Distributionen mit kompaktem Träger ausgeweitet.

Dies geschieht durch den Übergang zur dualen Halbgruppe unter der Voraussetzung, dass die ursprüngliche Feynman-Kac-Halbgruppe eine Fellereigenschaft für den Träger der Distribution besitzt: Beschränkte stetige Funktionen werden durch T_t in beschränkte Funktionen überführt, die auf einer Umgebung des Trägers der Distribution stetig sind.

Mit Hilfe des bekannten Brownschen-Brücken-Kalküls wird dann abschließend eine Transformationsformel für die Resolventenfunktion der Deltadistribution angegeben und an zwei Beispielen vorgeführt.

Die erhaltenen Transformationsformeln können auch als Methoden zur exakten Lösung von Pfadintegralen, wie in [6] beschrieben, aufgefasst werden. Gerade die zunächst seltsam anmutende Notwendigkeit der ¨Dimensionserweiterung¨ wirkt mit Blick auf (2.5) und der auf (2.6) folgenden Aussage gar nicht mehr unnatürlich und es besteht die Hoffnung, dass viele der dort beschriebenen Techniken in Wahrheit die beschriebene Eichinvarianz von Brownscher Bewegung ausnutzen.

0.4 Notation. Die in der Arbeit verwendeten Bezeichnungen sind weitgehend immer dieselben. Im Anhang befindet sich eine Tabelle der wichtigsten verwendeten Symbole. Bei der Verwendung der Feynman-Kac-Formel taucht der Startpunkt der Brownschen Bewegung entweder als oberer Index am Erwartungswert oder als oberer Index am Symbol für die Brownsche Bewegung auf. Diese kleine Mehrdeutigkeit möge man mir verzeihen.

0.5 Danke. An dieser Stelle möchte ich mich sehr herzlich bei Prof. H. Hering bedanken, der stets ein offenes Ohr für meine Fragen und Probleme hatte. Außerdem bedanke ich mich hiermit genauso herzlich bei all denen, die für die gerade in letzter Zeit sehr angenehme Arbeitsatmosphäre mitverantwortlich waren, wie: Anja, Susi, Brice, Wolfgang, Paul, Stefan M. und besonders Jörg.

1. Bilder Brownscher Bewegung unter harmonischen Morphismen.

In diesem ersten Abschnitt werden bekannte Tatsachen zusammengestellt, die sich mit einer Verallgemeinerung von Levys Theorem beschäftigen. Die Frage, welche Abbildungen eine Brownsche Bewegung wieder in eine zeittransformierte Brownsche Bewegung überführen können, wird zum Beispiel in [3] ausführlich erörtert. Diesem Paper folgt die hier gewählte Darstellung. Sie ist in einigen Punkten allgemeiner, als es später in der Arbeit benötigt wird. Es zeigt sich, dass die gesuchten Abbildungen analytisch dadurch charakterisiert werden können, dass sie harmonische Funktionen in harmonische Funktionen überführen. Solche Abbildungen nennt man harmonische Morphismen.

1.1 Situation. In [3] wird folgende Situation betrachtet:

Gegeben seien offene Mengen $V \subset \mathbb{R}^N, W \subset \mathbb{R}^n$ mit $N \geq n$, sowie eine abgeschlossene Menge $\bar{U} \subset V$ mit offenem Kern U. Ferner sei $\Phi : \bar{U} \to W$ eine stetige Funktion mit Bild $\Phi(\bar{U}) \subset W$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass U, V, W Nullumgebungen sind und dass $\Phi(0) = 0$ ist.

Ausserdem sei $X = (X_t, \Omega, P)$ ein Prozess mit Zustandsraum V und $Y = (Y_t, \hat{\Omega}, Q)$ ein Prozess mit Zustandsraum W.

1.2 Definition (Welding). *Sei $\tau_U := \inf\{t > 0 | X_t \notin U\}$ die erste Austrittszeit. Das τ_u-welding ("Verschweißen") von X und Y vermöge Φ ist der Prozess*

$$Z_t^y(\omega, \hat{\omega}) := \begin{cases} \Phi(X_t^x(\omega)) & , t \leq \tau_U \\ Y_{t-\tau_U}^{\Phi(X_{\tau_U}^x)}(\hat{\omega}) & , t > \tau_U \end{cases}$$

mit der Verteilung

$$\begin{aligned} R^y[Z_{t_1} \in E_1, \ldots, Z_{t_n} \in E_n, t_k \leq \tau_U < t_{k+1}] \\ = \int_\Omega \chi_{\Phi^{-1}(E_1)}(X_{t_1}) \ldots \chi_{\Phi^{-1}(E_k)}(X_{t_k}) \chi_{[t_k, t_{k+1})}(\tau_U) \\ \cdot Q^{\Phi(X_\tau)}[Y_{t_{k+1}-\tau} \in E_{k+1} \ldots Y_{t_n-\tau} \in E_n] dP^x, \end{aligned}$$

wobei $x = \psi(y)$ das Bild des Startpunktes $y \in \Phi(\bar{U})$ unter irgendeiner Rechtsinversen ψ von Φ ist.

Die Frage, wann das τ_U-welding zweier Prozesse mit einem gegebenen Prozess mit Zustandsraum W übereinstimmt, wird in [3] in einem für die späteren Anwendungen mehr als ausreichendem Rahmen beantwortet. Für ergänzende Betrachtungen siehe [7] insbesondere 1.3, p.209.

1.3 Definition (X-offen). *Eine Menge $M \subset V$ heißt X-offen, falls*

$$\tau_V(x) := \inf\{t > 0 | X_t^x \notin M\} > 0$$

fast sicher für alle $x \in M$. Eine Menge heißt X-nirgends dicht, falls sie keine nichtleere X-offene Teilmenge enthält.

Wir beschränken uns nun auf den Fall, dass X und Y jeweils Brownsche Bewegungen sind. Seien also $B_N = (B_t^N, \Omega, P)$ und $B_n = (B_t^n, \hat{\Omega}, \hat{P})$ Brownsche Bewegungen auf $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

Eine direkte Folgerung aus dem Hauptsatz von [3] (Theorem 1, p. 224) ist dann

1.4 Satz. *Sei entweder Φ nicht lokal konstant oder $n \geq 2$. Dann sind äquivalent:*

(1) *Für alle $f \in C^2(W), x \in U$ gilt*

$$\Delta_N(f \circ \Phi)(x) = \lambda(x)(\Delta_n f) \circ \Phi(x)$$

mit einer stetigen Funktion $\lambda(x) \geq 0$, deren Nullstellenmenge

$$N_\lambda := \{x \in U | \lambda(x) = 0\} \subset U$$

B^N-nirgends dicht liegt.

(2) *Es gibt eine stetige Funktion $\lambda : \bar{U} \to \mathbb{R}_0^+$ mit B^N-nirgends dichter Nullstellenmenge, die eine Zeittransformation*

$$\tau(t) := \begin{cases} \int_0^t \lambda(B_s)ds & , t \leq \tau_U \\ \int_0^{\tau_U} \lambda(B_s)ds + t - \tau_U & , t > \tau_U \end{cases}$$

definiert, und das τ_U-welding Z_t von B^N und B^n vermöge Φ stimmt nach der inversen Zeittransformation

$$t(\tau) := \inf\{s \geq 0 \; | \tau(s) = \tau\}$$

in Verteilung mit B^n überein, d.h.

$$Z_{\tau(t)} \sim B_t.$$

Diese Aussage ist unabhängig von der Auswahl der speziellen Rechtsinversen ψ von Φ.

Beweis. Der Beweis besteht aus schlichtem Einsetzen der Äquivalenz $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ aus [3], Thm. 1 unter Verwendung der Tatsache, dass $\frac{1}{2}\Delta$ Generator der Brownschen Bewegung ist. Die Bedingung $n \geq 2$ ergibt sich, da in diesem Fall Punkte B^n-polar sind ([3],p.223 f.). $\square$

Es zeigt sich, dass eine Abbildung, die die Eigenschaft (1.4.1) besitzt, rein analytisch dadurch charakterisiert werden kann, dass sie harmonische Funktionen in harmonische Funktionen überführt. Dies wird präzisiert durch

1.5 Lemma. *Sei $\Phi : \bar{U} \to W$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(1) *Für alle $f \in C^2(W)$, $x \in U$ gilt*

$$\Delta_N(f \circ \Phi)(x) = \lambda(x)(\Delta_n f) \circ \Phi(x)$$

mit einer stetigen Funktion $\lambda(x) \geq 0$.

(2) *Für alle offenen Teilmengen $W' \subset W$ und $f \in C^2(W)$ folgt aus*

$$\Delta_n f = 0$$

in W', dass auch

$$\Delta_N(f \circ \Phi) = 0$$

in $\Phi^{-1}(W')$.

Beweis. [2],Thm.1,$(ii) \Leftrightarrow (iv)$. □

Abschließend bleibt nur noch, der Sache einen Namen zu geben.

1.6 Definition (harmonischer Morphismus). *Eine Abbildung, die die äquivalenten Eigenschaften aus (1.5) besitzt, heißt harmonischer Morphismus.*

2. Eigenschaften harmonischer Morphismen.

Neben der im ersten Abschnitt beschriebenen stochastischen Sichtweise kann man harmonische Morphismen auch eher geometrisch charakterisieren. Harmonische Morphismen sind nämlich genau diejenigen harmonischen Abbildungen, die zusätzlich semikonform sind. Die Harmonizität ist verantwortlich für die Martingaleigenschaft des Bildprozesses, während die Semikonformalität Unabhängigkeit und gleiche quadratische Variation der Koordinatenprozesse bewirkt.

2.1 Definition (semikonform). *Eine differenzierbare Abbildung $\Phi : M \to N$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten heißt semikonform, falls für alle Punkte $x \in M$ mit $T_x\Phi \neq 0$ die Einschränkung der Tangentialabbildung*

$$T_x\Phi|_{K_x^\perp} : K_x^\perp \to T_{\Phi(x)}N$$

auf das orthogonale Komplement von $K_x := ker(T_x\Phi) \subset T_xM$ konform und surjektiv ist.

$$d_\Phi(x) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \text{ nicht regulär} \\ ||T_x\Phi|| & \text{, sonst} \end{cases}$$

heißt Dilatation der semikonformen Abbildung.

Insbesondere besagt diese Definition, dass semikonforme Abbildungen keine nichtregulären Punkte besitzen, an denen der Rang der Tangentialabbildung größer Null ist.

2.2 Satz (Geometrische Charakterisierung). *Sei $\Phi : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(1) *Φ ist ein harmonischer Morphismus.*
(2) *Φ ist eine semikonforme und harmonische Abbildung.*

Beweis. [5], p.123. □

Die Eigenschaft (2) lässt sich direkt in ein System partieller Differentialgleichungen übersetzen.

2.3 Folgerung. *$\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann ein harmonischer Morphismus, falls es eine nichtnegative Funktion $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ gibt mit*

(1) $\Delta\Phi^k(x) = 0$,$k = 1 \dots n$
(2) $(\nabla\Phi^k, \nabla\Phi^j)(x) = \lambda(x)\delta^{kj}$.

Beweis. [5], p.112. □

2.4 Bemerkung. *$\lambda(x) = d_\phi(x)^2$ ist das Quadrat der Dilatation.*

Die Folgerung (2.3) vermittelt einen Eindruck davon, dass harmonische Morphismen sehr spezielle Abbildungen sind. Insbesondere die Semikonformalität ist eine schwer herzustellende Eigenschaft. Für $m > n$ kann es keine nichtkonstanten harmonischen Morphismen $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ geben. Für $n = m$ ist die Situation ebenfalls vollständig geklärt:

2.5 Satz. *Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein harmonischer Morphismus. Dann gilt:*

(1) $n = 2 : \Phi$ *ist eine konforme Abbildung*
(2) $n \geq 3 : \Phi$ *ist eine affine konforme Abbildung.*

Beweis. [5], p.124. $\square$

2.6 Bemerkung. *(2.5.1) besagt, dass der bekannte Satz von Levy über die Transformation von Brownscher Bewegung mit holomorphen Abbildungen ein Spezialfall der Ergebnisse des ersten Abschnittes ist.*

Aus (2.5) geht hervor, dass es für $m \geq 3$ höchstens dann harmonische Morphismen $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nichtkonstanter Dilatation geben kann, falls $n > m$ ist. Im nächsten Abschnitt werden Beispiele solcher Abbildungen konstruiert, die zu Darstellungen von Cliffordalgebren assoziiert sind.

Abschließend sollen noch zwei weitere Eigenschaften harmonischer Morphismen aufgelistet werden.

2.8 Satz.

(1) *Die Komposition zweier harmonischer Morphismen Φ, Ψ ist ein harmonischer Morphismus mit Dilatation $d_{\Phi\circ\psi}(x) = d_\Phi(\Psi(x)) \cdot d_\Psi(x)$.*
(2) *Harmonische Morphismen sind offene Abbildungen.*

Beweis. [5], Ch.10. $\square$

2.9 Bemerkung. *(2.8.2) besagt, dass harmonische Morphismen auch an nicht regulären Punkten offen sind. Wie in* [5], *Ch.3 gezeigt wird, liegen die regulären Punkte überall dicht.*

3. Harmonische Morphismen, assoziiert zu Darstellungen von Cliffordalgebren.

Satz (2.5) wirft die Frage auf, ob es überhaupt ausreichend viele harmonische Morphismen mit nichtkonstanter Dilatation gibt. Insbesondere stellt sich die Frage, ob man, wie dies später benötigt wird, solche Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für beliebiges m finden kann. Es ist klar, dass in diesem Falle $n > m$ sein muss. Deswegen werden im Folgenden derartige Beispiele konstruiert. Die harmonischen Morphismen, deren Komponenten homogene quadratische Polynome sind, lassen sich vollständig durch Darstellungen bestimmter Cliffordalgebren beschreiben. Es ergibt sich, dass es für jedes $m \geq 2$ eine solche Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{d(m)} \to \mathbb{R}^m$ gibt, wobei $d(m)$ die Dimension einer irreduziblen Darstellung der zugehörigen Cliffordalgebra ist.

Für die später in der Arbeit zu beweisenden Transformationsformeln werden insbesondere eigentliche harmonische Morphismen benötigt, die surjektiv sind. Vier Beispiele solcher Abbildungen, die mit den Faserungen von Sphären durch Sphären zusammenhängen, werden am Ende ausgesondert und später bei der Betrachtung des dreidimensionalen Coulombpotentials auch benutzt. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt sind diese vier und die in (2.5) beschriebenen Abbildungen die einzigen mir bekannten derartigen Beispiele.

Die folgende kurze Zusammenstellung einiger bekannter Tatsachen über Cliffordalgebren stammt aus [15].

3.1 Definition (Cliffordalgebra). *Die Cliffordalgebra Cl_n^* ist die reelle Algebra mit Erzeugern $e_1, \ldots, e_n$ und Relationen*

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij} \quad i, j = 1 \ldots n.$$

(vgl. [15], Ch. I, §3)

Die Cliffordalgebren und ihre Darstellungen sind seit langem untersuchte Objekte mit vielfachen Anwendungen in der Mathematik. Folgende Tatsachen werden im weiteren Verlauf benötigt:

3.2 Satz. *Die Klassifikation der Cliffordalgebren Cl_n^* und ihrer irreduziblen Darstellungen wird vollständig gegeben durch*

(1) *Tabelle:*

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Cl_n^*	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$d(n)$	1	2	4	8	8	16	16	16

(2) *Periodizität:*

$$Cl_{n+8k}^* \cong Cl_n^* \otimes (Cl_8^*)^{\otimes k} \cong Cl_n^* \otimes \mathbb{R}(16)^{\otimes k}$$

$$d(n + 8k) = d(n) d(\mathbb{R}^{16^k}) = 16^k d(n)$$

Hierbei bezeichnet $K(m) := Hom_K(K^m, K^m)$ die Algebra der $m \times m$-Matrizen mit Koeffizienten in K. Da die Matrixalgebren einfach sind, gibt es jeweils

$$\alpha(n) = \begin{cases} 2 & , n \equiv 1 mod 4 \\ 1 & , sonst \end{cases}$$

irreduzible Darstellungen von Cl_n^*. Die reelle Dimension der diesen Darstellungen zugrundeliegenden Vektorräume ist $d(n)$.

Beweis. [15], Ch. I,§5. □

3.3 Lemma. *Ist $\rho : Cl_n^* \to Hom_{\mathbb{R}}(V,V)$ eine reelle Darstellung von Cl_n^*, so gibt es ein Skalarprodukt*

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R},$$

so dass die Erzeuger $e_1, \ldots, e_n$ von Cl_n^* orthogonal wirken.

Beweis. [15], Prop. 5.16, p.37. Hier wird dies zwar für Darstellungen von Cl_n bewiesen, zu Cl_n^* kann man aber genauso eine endliche Gruppe F_n^* finden mit den Erzeugern $e_1, \ldots, e_n$, einem weiteren zentralen Element -1 und den Relationen $e_i e_j = -e_j e_i$, $e_i^2 = (-1)^2 = 1$. □

Die nun folgende Aussage dient zur Vorbereitung der Konstruktion. Komponenten der zu konstruierenden Abbildung werden quadratische Formen, die durch Darstellungsmatrizen der Erzeuger der Cliffordalgebra gegeben werden.

3.4 Proposition. *Sei $\rho : Cl_n^* \to Hom_{\mathbb{R}}(V,V)$ eine irreduzible Darstellung und $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt mit den Eigenschaften aus (3.3). Der Kürze halber wird die darstellende Matrix $\rho(e_k)$ wieder einfach mit e_k bezeichnet. Dann gilt falls $n \geq 2$*

(1) $e_i = e_i^+$
(2) $(e_i w, e_j w) = 0$ *für alle* $w \in V$
(3) $spur(e_i) = 0$ *für* $i = 1, \ldots, n$.

Die erste Aussage ist auch für $n = 1$ richtig.

Beweis. (1) folgt wegen

$$\begin{aligned}(e_i w, w) &= (e_i^2 w, e_i w) \\ &= (w, e_i w).\end{aligned}$$

(2) Sei $i \neq j$. Dann ist

$$\begin{aligned}(e_j e_i w, w) &= (e_i w, e_j^+ w) \\ &= (e_i w, e_j w) \\ &= (w, e_i e_j w) \\ &= -(w, e_j e_i w) \\ &= -(e_i e_j w, w),\end{aligned}$$

woraus folgt, dass alle Glieder dieser Gleichungskette Null sein müssen.

(3) Sei $i \neq j$. Dann ist

$$\begin{aligned} spur(e_i) &= spur(e_j^2 e_i) \\ &= spur(e_j e_i e_j) \end{aligned}$$

nach zyklischem Vertauschen. Andererseits ist aber

$$spur(e_j^2 e_i) = -spur(e_j e_i e_j)$$

wegen der Relationen der Cliffordalgebra. □

3.5 Folgerung. *Für $n \geq 2$ ist die zu einer irreduziblen Darstellung der Cliffordalgebra assoziierte Abbildung*

$$\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n) : \mathbb{R}^{d(n)} \to \mathbb{R}^n$$

mit

$$\Phi^k(w) := (w, e_k w)$$

ein harmonischer Morphismus.

Beweis. Zunächst ist

$$\Delta\Phi^k(w) = 2spur(e_k) = 0$$

wegen (3.4.3). Weiterhin ist

$$\begin{aligned} (\nabla\Phi^i, \nabla\Phi^j)(w) &= (e_i w, e_j w) \\ &= \|w\|^2 \delta^{ij} \end{aligned}$$

wegen (3.4.2) und (3.3). Aufgrund des Kriteriums (2.3) ist somit die Folgerung bewiesen. □

3.6 Bezeichnung. *Die in (3.5) konstruierten harmonischen Morphismen werden im Folgenden Cliffordmorphismen genannt.*

Umgekehrt kann man sich auch überlegen, dass jeder harmonische Morphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dessen Komponenten homogene quadratische Polynome sind, von einer treuen Darstellung von Cl_m^* in $\mathbb{R}(n)$ herrührt.

3.7 Bemerkung. *Die Klassifikation der polynomialen harmonischen Morphismen in [8] besagt, dass die Cliffordmorphismen zu $n = 2, 3, 5, 9$, eingeschränkt auf die Einheitssphären der Darstellungsräume, genau die vier Faserungen von Sphären durch Sphären liefern:*

$$S^0 \to S^1 \xrightarrow{\hat{\Phi}} S^1$$

$$S^1 \to S^3 \xrightarrow{\hat{\Phi}} S^2$$

$$S^3 \to S^7 \xrightarrow{\hat{\Phi}} S^4$$

$$S^7 \to S^{15} \xrightarrow{\hat{\Phi}} S^8,$$

wobei $\hat{\Phi} := \Phi|_{S^{d(n)-1}}$. Diese Abbildungen werden im Folgenden sphärische harmonische Morphismen genannt.

3.8 Lemma. *Die harmonischen Morphismen aus (3.7) sind eigentliche und surjektive Abbildungen.*

Beweis. [1], Lemma 4.4 besagt, dass, bis auf etwaige Normierung, die Abbildungen aus (3.7) genau diejenigen sind, für die in [1], Satz 4.6 Gleichheit erreicht wird. Dies bedeutet

$$\|\Phi(w)\| = \|w\|^2.$$

Urbilder kompakter Mengen sind somit kompakt. Die Surjektivität folgt aus [1], Lemma 4.5 oder wahlweise aus der obigen Bemerkung (3.7). Diese besagen, dass die Einschränkung von Φ auf die Einheitssphäre surjektiv ist, weswegen sich dies aus der Homogenität der Abbildung auch für den ganzen Raum ergibt. $\square$

4. Nach unten beschränkte Potentiale.

In diesem Abschnitt werden zunächst Betrachtungen über nach unten beschränkte Potentiale angestellt. Wie in (4.2) erläutert, kann man sehr einfach sehen, dass für derartige Potentiale die ursprüngliche Feynmansche Methode zur Berechnung von Pfadintegralen das richtige Ergebnis liefert.

In (4.5) wird dann durch eine Integralformel eine erweiterte Resolventenfunktion $R(\xi, \zeta, x)\,[u_0]$ erklärt. Es ist aber zunächst nicht klar, ob diese Funktion tatsächlich etwas mit einer Resolvente der Halbgruppe zu tun hat. Um einen solchen Zusammenhang herzustellen, der dann auch ausgenutzt werden soll, wird zu der Zusatzvoraussetzung gegriffen, dass die Feynman-Kac-Halbgruppe zum Potential V vom Typ C_0 sein soll. Dann stimmt die Resolvente des Generators mit der der Halbgruppe überein und ist schwach holomorph in der Resolventenmenge. Dies und der Identitätssatz für holomorphe Funktionen wird dann ausgenutzt, um das Hauptergebnis (4.10) zu erhalten.

Die Literatur ist voll von hinreichenden Bedingungen an das Potential, wann eine C_0-Halbgruppe vorliegt. Meist wird dort untersucht, wann der Operator $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ wesentlich selbstadjungiert ist, was die C_0-Eigenschaft der Halbgruppe mit Generator H impliziert. Da für diese Aussagen im Allgemeinen ein zugrundeliegender Banachraum fixiert werden muss, wird hier auf derartige explizite Aussagen verzichtet.

4.1 Bezeichnung. *Eine messbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zu der es ein $C_V \in \mathbb{R}$ gibt mit $V(x) \geq C_V$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, heißt im Folgenden ein nach unten beschränktes Potential.*

4.2 Bemerkung. *Die nach unten beschränkten Potentiale sind vom Standpunkt der Feynman-Kac-Formel die einfachsten. So folgt zum Beispiel aus dem Satz von Lebesgue sofort, dass die Feynmansche Methode zur Berechnung von Pfadintegralen, die aus der punktweisen Approximation von Funktionalen der Form*

$$F(\omega) := \int_0^t V(B_s(\omega))ds : \Omega \to \mathbb{R}$$

durch Riemannsche Summen, d.h. durch Funktionale

$$F_n(\omega) := \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V(B_{\frac{kt}{n}}(\omega))$$

besteht, tatsächlich mit der Berechnung der Erwartungswerte vertauscht, d.h. es gilt

$$u_n(x,t) := E^x\left[u_0(B_t)e^{-F_n(\omega)}\right] \overset{n\to\infty}{\to} u(x,t) := E^x\left[u_0(B_t)e^{-F(\omega)}\right]$$

für festes $x \in \mathbb{R}^n$.

Wenn man Pfadintegrale als Limites solcher endlicher Feynmanapproximationen erklären will, stößt man auf das Problem, dass im allgemeinen Limes und Integration eben nicht mehr vertauschen. Das Coulombpotential $V(x) = -\frac{1}{|x|}$ liefert ein solches Beispiel. Zu einem gegebenen Potential a priori konvergente Feynmanapproximationen zu konstruieren, ist meines Wissens ein offenes Problem. In dieser Arbeit werden in bestimmten Spezialfällen Pfadintegrale für nicht nach unten beschränkte Potentiale in solche mit beschränkten Potentialen transformiert.

Dazu wird wie folgt vorgegangen: Zunächst wird eine Resolventenfunktion mit einem zusätzlichen komplexen Parameter betrachtet. Diese Funktion kann in einem offenen Bereich $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}^2$ durch eine Integralformel dargestellt werden. Dort ergibt sich dann eine Identität zwischen den zu ineinander transformierbaren Potentialen gehörenden Resolventenfunktionen. Diese ist dann auf jedes einfach zusammenhängende Holomorphiegebiet, das $\mathbb{K}$ enthält, fortsetzbar.

Der erste Schritt besteht nun im Nachweis der Vertauschbarkeit von zeitlicher Integration und Erwartungswertbildung für nach unten beschränkte Potentiale.

4.3 Lemma. *Sei* $\mathbb{K} := \{(\xi,\zeta) \in \mathbb{C}^2 | Re(\zeta) > 0, Re(\xi + C_V\zeta) > 0\}$*,* V *ein nach unten beschränktes Potential und* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Ist* $(\xi,\zeta) \in \mathbb{K}$*, so gilt für fast alle* $\omega \in \Omega$ *:*

$$\left|\int_0^\infty dt \quad u_0(B_t(w)) \exp\left(-\int_0^t (\xi + \zeta V)(B_s) ds\right)\right| \\ \leq \frac{\|u_0\|_\infty}{Re(\xi + \zeta C_V)}.$$

Beweis. Lebesgue-fast sicher ist $|u_0(B_t)| \leq \|u_0\|_\infty$, also ist die Aufenthaltszeit

$$\lambda_t(\omega) = \int_0^t \chi_A(B_s) ds$$

von Brownscher Bewegung in der Menge $A := \{x|\ |u_0(x)| > \|u_0\|\}$ gleich Null für fast alle ω. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty dt \quad u_0(B_t) \exp\left(-\int_0^t (\xi + \zeta V(B_s)) ds\right)\right| \\ &\leq \int_0^\infty dt\ \|u_0\|_\infty \exp\left(-\int_0^t (\xi + \zeta C_V) ds\right) \\ &= \|u_0\|_\infty \int_0^\infty dt\ e^{-Re(\xi+\zeta C_V)t} \\ &= \frac{\|u_0\|_\infty}{Re(\xi + \zeta C_V)}. \quad \square\end{aligned}$$

Das nächste Lemma sagt aus, dass es sich bei den Feynman-Kac-Halbgruppen zu nach unten beschränkten Potentialen um quasi beschränkte Halbgruppen im Sinne von [13], p.487 handelt.

4.4 Lemma. *Sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ist $Re(\zeta) > 0$ und V nach unten beschränkt, so gilt:*

$$\begin{aligned}&\left| E^x \left[u_0(B_t) \exp\left(-\zeta \int_0^t V(B_s) ds \right) \right] \right| \\ &\leq e^{-C_V Re(\zeta) t} \|u_0\|_\infty\end{aligned}$$

Beweis. Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}&\left| E^x \left[u_0(B_t) \exp\left(-\zeta \int_0^t V(B_s) ds \right) \right] \right| \\ &\leq E^x \left[|u_0(B_t)| \exp\left(-Re(\zeta) \int_0^t V(B_s) ds \right) \right] \\ &\leq e^{-C_V Re(\zeta) t} \|u_0\|_\infty \quad \square\end{aligned}$$

Der Satz von Fubini liefert nun nach diesen Vorbetrachtungen

4.5 Folgerung. *Für $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, V nach unten beschränkt und $(\xi, \zeta) \in \mathbb{K}$ konvergiert*

$$\begin{aligned}R_V(\xi, \zeta, x)[u_0] :=& E^x \left[\int_0^\infty dt \; u_0(B_t) \exp\left(- \int_0^t (\xi + \zeta V)(B_s) ds \right) \right] \\ =& \int_0^\infty dt \; e^{-\xi t} E^x \left[u_0(B_t) \exp\left(-\zeta \int_0^t V(B_s) ds \right) \right].\end{aligned}$$

Die Funktion $R_V(\xi, \zeta, x)[u_0]$ ist holomorph in $\mathbb{K}$.

Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt bereits erwähnt wurde, müssen nun Zusatzvoraussetzungen an das Potential gemacht werden, um die oben definierte Funktion mit der Resolvente des Generators vergleichen zu können.

4.6 Voraussetzung. *Stellt Multiplikation mit dem Potential V einen Operator dar, der relativ Δ-beschränkt ist im Sinne von [13], Thm. 2.4, p.499, so ist $A_V = \frac{1}{2}\Delta - V$ wesentlich selbstadjungiert. Im Folgenden soll ein nach unten beschränktes Potential auch noch diese Voraussetzung erfüllen.*

4.7 Folgerung. *Unter den genannten Voraussetzungen stimmt die oben definierte Funktion für $\zeta = 1$ mit der Resolvente des Generators überein, d.h. es ist*

$$R_V(\xi, 1, x)\,[u_0] = Res(A_V, \xi) u_0$$

für $Re(\xi) > -C_V$.

Beweis. Die Voraussetzung bedeutet, dass die Feynman-Kac-Halbgruppe zum Potential V eine C_0-Halbgruppe mit Generator A_V ist. Die Behauptung folgt dann aus [20], p.240 ff. $\square$

Die Resolventenfunktion besitzt eine Invarianzeigenschaft, deren einfachste Form folgendermaßen beschrieben werden kann:

4.8 Lemma (Globale Transformationsformel). *Ist $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ein surjektiver harmonischer Morphismus mit Quadrat der Dilatation $d_\Phi^2 = \lambda$, Φ eigentlich und $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so gilt nach Wahl einer Rechtsinversen ψ zu Φ:*

$$\begin{aligned}
&R_V(\xi, \zeta, x)[u_0] \\
&= E^{\psi(x)}\left[\int_0^\infty dt\ \lambda(B_t) u_0 \circ \Phi(B_t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(B_s)(\xi + \zeta V \circ \Phi)(B_s) ds\right)\right].
\end{aligned}$$

Der Beweis benutzt wesentlich die Invarianzeigenschaft (1.4). Dabei sind die Voraussetzungen so gemacht, dass kein τ-welding nötig ist. Der harmonische Morphismus wird als surjektiv vorausgesetzt. Dies ist für die später betrachteten Beispiele ausreichend. Vor dem Beginn des Beweises wird die Notation etwas vereinfacht.

4.9 Notation. *Mit*

$$\Phi^* : C(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^N)$$

wird die Abbildung

$$\Phi^* f(x) := \lambda(x) \cdot (f \circ \Phi)(x)$$

bezeichnet.

Die Abbildung Φ^* stellt die schon erwähnte Transformation der Anfangsbedingungen dar.

Beweis. Zunächst wird erläutert, was (1.4) unter den hiesigen Voraussetzungen ergibt:

Ist B_t die Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^N$ und

$$\tau(t) = \int_0^t \lambda(B_s) ds$$

die durch das Quadrat der Dilatation des harmonischen Morphismus gegebene Zeittransformation, so ist

$$\Phi(B_{t(\tau)}) \sim B_\tau,$$

d.h. die abgebildete, invers zeittransformierte Brownsche Bewegung im $\mathbb{R}^N$ stimmt in Verteilung mit der Brownschen Bewegung in $\mathbb{R}^n$ überein.

Bezeichnet $t(\tau)$ die inverse Zeittransformation wie in (1.4.2), so besagt der Transformationssatz für Integrale

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty d\tau\ (u_0 \circ \Phi)(B_{t(\tau)}) \exp\left(-\int_0^\tau (\xi + \zeta V \circ \Phi)(B_{s(\sigma)}) d\sigma\right) \\
&\quad = \int_0^{t(\infty)} dt\ \lambda(B_t)(u_0 \circ \Phi)(B_t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(\xi + \zeta V \circ \Phi)(B_s) ds\right) \\
&\quad = \int_0^\infty dt\ \Phi^* u_0(B_t) \exp\left(-\int_0^t \Phi^*(\xi + \zeta V)(B_s) ds\right),
\end{aligned}$$

für fast alle $\omega \in \Omega$, da $t(\infty) = \infty$ fast sicher. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
&R_V(\xi, \zeta, x)[u_0] \\
&\qquad = E^x \left[\int_0^\infty d\tau \; u_0(B_\tau) \exp\left(- \int_0^\tau (\xi + \zeta V)(B_\sigma) d\sigma \right) \right] \\
&\qquad = \tilde{E}^{\psi(x)} \left[\int_0^\infty d\tau \; (u_0 \circ \Phi)(B_{t(\tau)}) \exp\left(- \int_0^\tau (\xi + \zeta V \circ \Phi)(B_{s(\sigma)}) d\sigma \right) \right] \\
&\qquad = E^{\psi(x)} \left[\int_0^\infty dt \; \Phi^* u_0(B_t) \exp\left(- \int_0^\tau \Phi^*(\xi + \zeta V)(B_s) ds \right) \right]
\end{aligned}
$$

wobei $\tilde{E}$ die Erwartung bezüglich der Verteilung von $B_{t(\tau)} = X_\tau$ bezeichnet. $\square$

Das nächste Resultat stellt den zentralen Punkt dieser Arbeit dar. Alles Weitere besteht eigentlich nur noch aus Variationen dieses einen Themas.

Für sich betrachtet ist die folgende Gleichung sicherlich überraschend. Sie besagt, dass die erweiterten Resolventenfunktionen für völlig verschiedene Potentiale in verschiedenen zugrundeliegenden euklidischen Räumen auseinander hervorgehen, wenn man nur die Anfangsbedingungen passend verändert.

Da die erweiterten Resolventenfunktionen aber speziell die Resolvente umfassen, bedeutet dies, dass, wieder bis auf Berücksichtigung der analytischen Fortsetzungsproblematik, die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für ein Potential aus der Lösung für das duale Potential erhalten werden kann.

4.10 Folgerung. *Ist $\Phi^* V \equiv c$, so gilt*

$$R_V(\xi, \zeta, x)[u_0] = R_{\frac{1}{V \circ \Phi}}(c\zeta, c\xi, \psi(x))[\Phi^* u_0].$$

für $(\xi, \zeta) \in \mathbb{L} := \{(\xi, \zeta) \in \mathbb{C}^2 \;\; | c \cdot Re(\zeta) > 0, \; Re(\xi) > 0\}$.

Beweis. Aus $\Phi^* V \equiv c$ folgt

$$
\begin{aligned}
\Phi^*(\xi + \zeta V)(x) &= \xi \cdot \lambda(x) + \zeta c \\
&= \frac{c\xi}{V \cdot \Phi} + \zeta c
\end{aligned}
$$

Da das Quadrat der Dilatation positiv ist, konvergiert

$$\int_0^\infty dt \; \Phi^* u_0(B_t) \exp\left(- \int_0^\tau (\lambda + \zeta c)(B_s) ds \right)$$

für alle $cRe(\zeta) > 0$ und alle $Re(\xi) > 0$. Man kann nun die Rechnungen in (4.8) vom Bildpotential in $\mathbb{R}^N$ her zurückverfolgen und erhält für den angegebenen Konvergenzbereich

$$
\begin{aligned}
R_V(\xi, \zeta, x)[u_0] &= E^{\psi(x)} \left[\int_0^\infty dt \; \Phi^* u_0(B_t) \exp\left(- \int_0^\tau \left(\frac{\xi c}{V \circ \Phi} + \zeta c \right)(B_s) ds \right) \right] \\
&= R_{\frac{1}{V \circ \Phi}}(c\zeta, c\xi, \psi(x))[\Phi^* u_0]. \quad \square
\end{aligned}
$$

4.11 Bemerkung. *Die Formel (4.10) wurde in anderer Form zuerst in* [4] *für den Fall des Coulombpotentials formuliert. In* [2] *finden sich bereits Betrachtungen, in deren Zusammenhang die sphärischen harmonischen Morphismen besonders erwähnt werden.*

Wie erhalten wir nun aus dieser Identität die gesuchte Information über die Resolventen der dualen Potentiale ?

Dazu müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Ist $c > 0$, so ist die Situation klar. Die Hyperebenen $H := \{(\xi, 1) \,|\xi \in \mathbb{C}\}$ und $G := \{(1, \zeta) \,|\zeta \in \mathbb{C}\}$, auf denen die jeweiligen Resolventen leben, schneiden beide den Konvergenzbereich in einer offenen Halbebene. Die analytische Fortsetzung auf den Rest der jeweiligen Ebenen sollte also die Resolventen der Halbgruppen zu den jeweiligen Potentialen ergeben.

Der Fall $c < 0$ ist schwieriger. Hier schneidet nur die Ebene H den Konvergenzbereich. Um eine Chance zu haben, die Resolvente für V berechnen zu können, muss man zunächst entlang H bis zum Treffpunkt mit G fortsetzen, um dann aus dem somit dort erhaltenen Funktionskeim die Resolvente auf G zu rekonstruieren. Insbesondere das Problem, unter welchen Umständen die so konstruierte holomorphe Funktion auf G mit der Resolvente übereinstimmt, erscheint recht schwierig. Es bestehen verwandte Probleme in der analytischen Störungstheorie von Semigruppen [13].

Im Falle, dass wir für eines der Potentiale über exakte Lösungen verfügen, sieht die Situation anders aus. Hier fällt die Fortsetzungsproblematik weg.

4.12 Beispiel. (1) Sei $V_\alpha^\pm := \pm|z|^\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha > -2$. Sei weiterhin $\Phi_\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die holomorphe Funktion

$$\Phi_\beta(z) = \left(\frac{2}{\beta}\right) z^\beta.$$

Dann ist Φ nach (2.5) ein eigentlicher harmonischer Morphismus und es gilt

$$\begin{aligned}\Phi_\beta^* V_\alpha^\pm(z) &= \pm\frac{1}{4}|\Phi_\beta'(z)|^2|\Phi_\beta(z)|^\alpha \\ &= \pm\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\beta}\right)^2 \beta^2|z|^{\alpha\beta+2\beta-2}.\end{aligned}$$

Falls $(\alpha + 2)\hat{\beta} = 2$ ist, folgt also

$$\Phi_{\hat{\beta}}^* V_\alpha^\pm(z) \equiv \pm 1.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}V_\alpha^\pm \circ \Phi_{\hat{\beta}}(z) &= \pm\left(\frac{2}{\hat{\beta}}\right)^\alpha |z|^{\alpha\hat{\beta}} \\ &= \pm(\alpha+2)^\alpha |z|^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}}.\end{aligned}$$

Einsetzen in (4.10) ergibt somit

$$
\begin{aligned}
R_{\pm|z|^\alpha}(\xi,\zeta,x)[u_0] &= R_{\pm(\alpha+2)^{-\alpha}|z|^{-\frac{2\alpha}{\alpha+2}}}(\pm\zeta,\pm\xi,\psi(x))[\Phi^* u_0] \\
&= R_{\mp(\alpha+2)^{-\alpha}|z|^{-\frac{2\alpha}{\alpha+2}}}(\mp\zeta,\pm\xi,\psi(x))[\Phi^* u_0],
\end{aligned}
$$

falls die zweite Resolventenfunktionen ausreichend analytisch fortgesetzt werden kann. Physikalisch bedeutet dies, dass die Pfadintegrale in Impulsdarstellung für ganz verschiedene Potentiale auseinander hervorgehen. Duale Exponenten ergeben sich durch $\tilde{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha+2}$. Diese Dualität für Zentralpotentiale war wohl schon Newton bekannt [9].

(2) Das dreidimensionale Coulombpotential ist mittels des zu der Faserung $S^1 \to S^3 \to S^2$ (Hopfabbildung) gehörigen sphärischen harmonischen Morphismus zu der Darstellung von Cl_3^* äquivalent zum harmonischen Oszillator. Die Abbildung wird mit

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

bezeichnet. Nach (3.8) ist diese Abbildung eigentlich und es ist $|\Phi(x)| = |x|^2$ sowie $\lambda(x) = d_\Phi(x)^2 = 4|x|^2$.

Sei nun $V(x) = -\frac{1}{|x|}$. Dann ist

$$\Phi^* V = -\frac{4|x|^2}{|\Phi(x)|} = -4$$

sowie

$$\frac{1}{V \circ \Phi(x)} = -|x|^2.$$

Einsetzen ergibt nun:

$$
\begin{aligned}
R_{-\frac{1}{|x|}}(\xi,\zeta,x)[u_0] &= R_{-|x|^2}(-4\zeta,-4\xi,\psi(x))[\Phi^* u_0] \\
&= R_{|x|^2}(-4\zeta,4\xi,\psi(x))[\Phi^* u_0].
\end{aligned}
$$

Dies zeigt die Dualität zwischen dem dreidimensionalen Coulombpotential und dem vierdimensionalen harmonischen Oszillator.

4.13 Bemerkung. *Die Transformation Φ ist in der Himmelsmechanik schon lange als Kuustanheimo-Stiefel-Transformation bekannt. Dort regularisiert sie die nicht-hausdorffschen Punkte des Modulraumes der klassischen Bahnen* [19]*, p.277.*

4.14 Bemerkung. *Natürlich hätte man auch gleich mit der Hopfabbildung die zugehörigen Schrödingergleichungen ineinander überführen können.*

5. h-harmonische Morphismen.

In diesem Abschnitt werden die Transformationsformeln (4.8), (4.10) auf den Fall h-harmonischer Morphismen verallgemeinert. Es zeigt sich hierbei, dass die Deformation der Metrik einem zusätzlich auftretenden Potentialterm äquivalent ist.

5.1 Definition (h-harmonische Funktion). *Sei $h \in C^\infty(M)$ eine Funktion mit $h(x) > 0$ für alle $x \in M$. eine Funktion $u \in C^2(M)$ heißt h-harmonisch, falls gilt:*

$$\Delta_M u + 2(\nabla \log h, \nabla u) = 0.$$

5.2 Bemerkung. *(1) Für $dim(M) \neq 2$ ist*

$$\Delta_M^h := h^{-\frac{4}{dim(M)-2}}(\Delta_M + 2(\nabla \log h, \nabla .))$$

der Laplace-Beltrami-Operator zur Metrik $g^{(h)} = h^{\frac{4}{dim(M)-2}} g$ auf M. h-harmonische Funktionen auf (M, g) sind also harmonische Funktionen auf $(M, g^{(h)})$. (2) Falls h selbst harmonisch ist, so ist u h-harmonisch genau dann, wenn $u \cdot h$ harmonisch ist.

5.3 Definition (h-harmonischer Morphismus). *Eine stetige Abbildung $\Phi : M \to N$ heißt h-harmonischer Morphismus, falls für alle auf einer offenen Menge $V \subset N$ harmonischen Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$ die Funktion $f \circ \Phi : \Phi^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ auf $f^{-1}(V)$ h-harmonisch ist.*

5.4 Bemerkung. *Für $dim(M) = dim(N) = 2$ gibt es nur h-harmonische Morphismen mit $h \equiv 1$. (5.2) bedeutet also keine wirkliche Einschränkung.*

Aufgrund der Bemerkung (5.2) ist es verständlich, dass h-harmonische Morphismen eine ähnliche Charakterisierung wie harmonische Morphismen in (2.3) besitzen.

5.5 Proposition. *$\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^n) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ist ein h-harmonischer Morphismus genau dann, wenn eine nichtnegative Funktion $\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ existiert, so dass*

(1) $\Delta_M \Phi^k + 2(\nabla \log h, \nabla \Phi^k) = 0$
(2) $(\nabla \Phi^k, \nabla \Phi^j)(x) = \lambda(x)\delta^{kj}$

Beweis. [5], Ch.12, p.140 f. □

5.6 Definition (h-Prozess). *Der durch*

$$X_t^h := B_t + \int_0^t \nabla \log h(B_s) ds$$

gegebene Prozess auf $\mathbb{R}^N$ heisst h-Prozess mit Startpunkt x.

Der h-Prozess wird in dem nachher zu beweisenden Analogon der Transformationsformel (4.8) für h-harmonische Morphismen die Rolle der Brownschen Bewegung in $\mathbb{R}^N$ spielen. Die Verteilung des h-Prozesses besitzt eine explizit beschreibbare Girsanovdichte bezüglich des Wienermaßes. Diese wird jetzt ausgerechnet.

5.7 Bemerkung. *Aufgrund der Voraussetzungen an h in (5.1) ist der Prozess*

$$c_s := \nabla \log h(B_s)$$

prävisibel.

5.8 Satz (Girsanovtransformation). *Ist*

$$D_t := \exp\left(- \int_0^t \nabla \log h(B_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\nabla \log h(B_s)|^2 ds \right)$$

ein P-Martingal, so ist X_t^h eine Brownsche Bewegung bezüglich Q, wobei

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathbb{F}_{t+}} = D_t \text{ für alle } t.$$

Beweis. [18], (38.9) Theorem, p.82. $\square$

5.9 Lemma. *Die Girsanovdichte in (5.8) lässt sich umschreiben zu*

$$D_t := \left[\frac{h(B_0)}{h(B_t)}\right] \exp\left(- \int_0^t W(B_s) dB_s \right)$$

mit $W(x) = \left(|\frac{\nabla h}{h}|^2 + \frac{\Delta h}{2h}\right)(x)$.

Beweis. Einfaches Einsetzen der Ito-Formel ergibt

$$d \log h(B_t) = \nabla \log h(B_t) dB_t + \frac{1}{2} \Delta \log h(B_s) ds,$$

also

$$\begin{aligned} \int_0^t \nabla \log h(B_s) ds &= \int_0^t d \log h(B_s) - \frac{1}{2} \Delta \log h(B_s) ds \\ &= \log h(B_t) - \log h(B_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta \log h(B_s) ds. \end{aligned}$$

Einsetzen in (5.8) und

$$\nabla \log h - |\nabla \log h|^2 = \frac{h \Delta h - 2 |\nabla h|^2}{h^2}$$

ergibt die Behauptung. $\square$

5.10 Bezeichnung. *W heißt im Folgenden das h-Potential.*

5.11 Lemma. *Sei $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ein surjektiver h-harmonischer Morphismus und X_t der h-Prozess aus (5.6). Dann genügt $Y_t := \Phi(X_t)$ der stochastischen Differentialgleichung*

$$dY_t^k = \nabla\Phi^k(X_t) \cdot dB_t.$$

Beweis. Ito-Formel

$$\begin{aligned} dY_t^k &= \nabla\Phi^k(X_t) \cdot dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi^k}{\partial x^i \partial x^k} dX_t^i \cdot dX_t^j \\ &= \nabla\Phi^k(X_t) \cdot [dB_t + \nabla \log h(B_t)dt] + \frac{1}{2}\Delta\Phi^k dt \\ &= \nabla\Phi^k(X_t) \cdot [dB_t + (\nabla \log h(B_t) - \nabla \log h(B_t))dt] \\ &= \nabla\Phi^k(X_t) dB_t. \quad \square \end{aligned}$$

5.12 Proposition. *Sei nun wieder*

$$\tau(t) := \int_0^t \lambda(X_s^h) ds$$

mit $(\nabla\Phi^i, \nabla\Phi^j)(x) = \lambda(x)\delta^{ij}$ die Zeittransformation. Sei weiterhin Z_τ gegeben durch

$$Z_\tau := X_{t(\tau)}^h.$$

Dann stimmen $\Phi(Z_\tau)$ und B_τ in Verteilung überein.

Beweis. [7], Theorem 2, p.218. $\square$

Die Situation ist also völlig analog zu der in Abschnitt 4 behandelten. Die Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}^N$ wird lediglich durch den h-Prozess ersetzt. Die Verteilung des h-Prozesses besitzt eine gutartige Dichte bezüglich Brownscher Bewegung. Es ist bemerkenswert, dass sich eine quasikonforme Änderung der Metrik darin übersetzt, dass man stattdessen genauso eine Brownsche Bewegung im h-Potential betrachten kann.

5.13 Lemma (Transformationsformel für h-harmonische Morphismen).

Sei $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ein surjektiver und eigentlicher h-harmonischer Morphismus sowie $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} &E^x \left[\int_0^\infty dt\ u_0(B_t) \exp\left(-\int_0^t (\xi + \zeta V)(B_s) ds \right) \right] \\ =&E^x \left[\int_0^\infty dt\ \Phi^* u_0(B_t) \left[\frac{h(B_0)}{h(B_t)} \right] \exp\left(-\int_0^t (\xi\lambda + \zeta\Phi^* V + W)(B_s) ds \right) \right]. \end{aligned}$$

Beweis. Analog wie bei dem Beweis von (4.8) gilt

$$\begin{aligned} &E^x \left[\int_0^\infty d\tau\ u_0(B_\tau) \exp\left(-\int_0^\tau (\xi + \zeta V)(B_\sigma) d\sigma \right) \right] \\ =&\hat{E}^x \left[\int_0^\infty dt\ \Phi^* u_0(X_t^h) \exp\left(-\int_0^t (\xi\lambda + \zeta\Phi^* V)(X_s^h) ds \right) \right], \end{aligned}$$

wobei $\hat{E}$ die Erwartung bezüglich der Verteilung Q von X_t^h ist. Wegen (5.9) ist dies dasselbe wie

$$E^{\psi(x)}\left[\int_0^\infty dt\ \Phi^* u_0(B_t)\left[\frac{h(B_0)}{h(B_t)}\right]\exp\left(-\int_0^t (\xi+\zeta V-W)(B_s)ds\right)\right]. \quad \square$$

5.14 Folgerung. *Falls $\Phi^* V \equiv c \in \mathbb{R}$, so folgt unter den Voraussetzungen von (5.13)*

$$\begin{aligned} &R_V(\xi,\zeta,x)[u_0] \\ &\quad = E^{\psi(x)}\left[\int_0^\infty dt\ \Phi^* u_0(B_t)\left[\frac{h(B_0)}{h(B_t)}\right]\exp\left(-\int_0^t (c\zeta+\frac{\xi}{V\circ\Phi}-W)(B_s)ds\right)\right]\end{aligned}$$

für alle $(\xi,\zeta)\in\mathbb{L}$.

Beweis. Einsetzen in (5.13). $\square$

5.15 Bemerkung. *Die Formel ist nützlich, falls exakte Lösungen der Schrödingergleichung für den Operator $H=-\frac{1}{2}\Delta+W$ bekannt sind.*

6. Distributive Anfangsbedingungen.

Wenn man in das Feynman-Kac-Funktional formal die Deltadistribution einsetzt, so erhält man den Wärmeleitungskern. Es ist also nützlich, auch für den Fall distributiver Anfangsbedingungen eine Transformationsformel zur Verfügung zu haben. Einsetzen distributiver Anfangsbedingungen macht den Übergang zur dualen Halbgruppe erforderlich. Dies wird im Folgenden erläutert. Zunächst wird eine Klasse von Potentialen beschrieben, deren zugehörige Feynman-Kac-Halbgruppen auf einer offenen Teilmenge der $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Art Fellereigenschaft besitzen: Die Halbgruppe überführt stetige beschränkte Funktionen in $\mathbb{R}^n$ in stetige beschränkte Funktionen auf U. Liegt der Träger einer Distribution in U, so lässt sich die adjungierte Halbgruppe in einem für den Beweis einer Transformationsformel ausreichenden Maße erklären.

6.1 Lemma. *Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein nach unten beschränktes Potential $V \geq C_V$, das folgender Bedingung $(*)$ genügt:*

Für fast alle $\omega \in \Omega$ gibt es eine offene Umgebungen $T_\omega := T_\omega(t, x) \subset \mathbb{R}^n$ von $\{B_s(\omega) + x | s \in [0, t]\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, so dass V auf T_ω stetig ist.

Dann ist für $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ die Funktion

$$T_t f(x) := E^x \left[f(B_t) \exp \left(- \int_0^t V(B_s) ds \right) \right]$$

stetig in x.

Beweis. Wähle zunächst δ_0 so, dass

$$B_s^y(\omega) = B_s(\omega) + y \in T_\omega$$

für alle $s \in [0, t]$ und alle y mit $|x - y| < \delta_0(\omega)$. Für alle $s \in [0, t]$ erhalten wir somit (punktweise) Konvergenz

$$\lim_{y \to x} V(B_s(\omega) + x) = V(B_s(\omega) + y),$$

da $V|_{T_\omega}$ stetig ist. Aus dem Satz von Lebesgue folgt somit, da V nach etwaiger Schrumpfung von T_ω als beschränkt angenommen werden kann, dass

$$\lim_{y \to x} \int_0^t |V(B_s(\omega) + x) - V(B_s(\omega) + y)| = 0$$

ist. Wegen

$$\left| \exp \left(- \int_0^t V(B_s^x) ds \right) - \exp \left(- \int_0^t V(B_s^y) ds \right) \right| \leq e^{-C_V t} \left| \int_0^t (V(B_s^x) - V(B_s^y)) ds \right|$$

gibt es also zu einem vorgegebenen $\epsilon > 0$ ein $\delta_1 < \delta_0$ mit

$$\left| \exp \left(- \int_0^t V(B_s^x) ds \right) - \exp \left(- \int_0^t V(B_s^y) ds \right) \right| < \frac{e^{C_V t}}{2\|f\|} \epsilon$$

für alle y mit $|x-y| < \delta_1(\omega)$. Für fast alle ω erhalten wir somit

$$\lim_{y\to x}\left|\exp\left(-\int_0^t V(B_s^x)ds\right)-\exp\left(-\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right| = 0.$$

Weiterhin ist der Ausdruck in Betragsstrichen Lebesgue-beschränkt, nämlich durch $2e^{-C_V t}$. Es folgt also

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x} E\left|\exp\left(-\int_0^t V(B_s^x)ds\right)-\exp\left(-\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right|\\ =&E\lim_{y\to x}\left|\exp\left(-\int_0^t V(B_s^x)ds\right)-\exp\left(-\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right|\\ =&0\end{aligned}$$

Da $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ selbst stetig war, folgt auch

$$\lim_{y\to x}|f(B_s^x)-f(B_s^y)| = 0$$

für alle $\omega \in \Omega$. Da f beschränkt ist, ist nach dem Satz von Lebesgue ebenfalls

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x} E|f(B_s^x)-f(B_s^y)|\\ =&E\lim_{y\to x}|f(B_s^x)-f(B_s^y)|\\ =&0.\end{aligned}$$

Aufgrund der Ungleichung

$$\begin{aligned}&\left|f(B_t^x)\exp\left(-\int_0^t V(B_s^x)ds\right)-f(B_t^y)\exp\left(-\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right|\\ \le&e^{-C_V t}|f(B_s^x)-f(B_s^y)|+\|f\|\cdot\left|\exp\left(-\int_0^t V(B_s^x)ds\right)-\exp\left(-\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right|\end{aligned}$$

folgt nun sofort

$$\lim_{y\to x}\left|E\left[f(B_t^x)\exp\left(-\int_0^t V(B_s^x)ds\right)-f(B_t^y)\exp\left(-\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right]\right| = 0.$$

Dies ergibt die Stetigkeit von $T_t f$ in x. □

6.2 Folgerung. *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und polar für Brownsche Bewegung und das nach unten beschränkte Potential V stetig in $\mathbb{R}^n - S$. Dann ist $T_t f$ stetig in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n - S$.*

Beweis. Eine Menge S heißt polar für Brownsche Bewegung, falls

$$P(\{\omega|\ \exists_{t>0} : B_t(\omega) \in S\}) = 0.$$

Ist S zusätzlich abgeschlossen, so ist für fast alle $\omega \in \Omega$

$$\inf_{s\in[0,t]} d(S, B_s(\omega)) > 0.$$

Damit erfüllen die hier betrachteten Potentiale die Bedingung $(*)$ aus (6.1). □

6.3 Definition (einfaches Potential). *Die Potentiale in (6.2) heißen einfache Potentiale. Die Menge der Unstetigkeitsstellen einfacher Potentiale wird im Folgenden stets mit S bezeichnet.*

6.4 Definition (zulässige Distribution). *Ist V ein einfaches Potential, so heißt die Distribution mit kompaktem Träger $\mu \in C_b(\mathbb{R}^n)^*$ zulässig für V, falls*

$$supp(\mu) \subset \mathbb{R}^n - S.$$

6.5 Lemma. *Sei μ zulässig für V und*

$$T_t^* \mu(f) := \mu(T_t f).$$

Dann ist $T_t \mu \in C_b(\mathbb{R}^n)^*$ für alle $t > 0$.

Beweis. Sei U eine Umgebung von supp(μ) mit $U \cap S = \emptyset$. Nach (6.2) ist dann $T_t f \in C(U)$ stetig in U für alle $t > 0$.

Da

$$\begin{aligned} |T_t f(x)| &\leq E \left| f(B_t^x) \exp\left(- \int_0^t V(B_s^x) ds \right) \right| \\ &\leq \|f\| e^{-C_V t} \end{aligned}$$

folgt, dass

$$\begin{aligned} \|T_t f\|_U &:= \sup_{x \in U} |T_t f(x)| \\ &\leq e^{-C_V t} \|f\| \end{aligned}$$

ist. Somit ist $T_t f \in C_b(U)$. Wegen $\mu \in C_b(U)^*$ ist auch

$$|\mu(g)| \leq K_\mu \|g\|_U.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} |\mu(T_t f)| &\leq K_\mu \|T_t f\|_U \\ &\leq K_\mu e^{-C_V t} \|f\|. \quad \square \end{aligned}$$

6.6 Bemerkung. *Wie man sieht, erhalten wir sogar die Abschätzung*

$$\|T_t^* \mu\| \leq e^{-C_V t} \|\mu\|.$$

6.7 Bemerkung. *T_t^* ist die adjungierte Halbgruppe zu T_t. Starke Stetigkeit von T_t übersetzt sich in schwache Stetigkeit von T_t^* im Sinne der Distributionen. Siehe dazu* [20], *p.272 ff.*

Zum Abschluss soll nun eine Transformationsformel für die Deltadistribution δ_y angegeben werden.

6.8 Bemerkung. *δ_y ist zulässig für das einfache Potential V, falls $y \notin S$.*

Um die Transformationsformel für die Deltadistribution zu formulieren, werden einige bekannte Tatsachen über Brownsche Brücken benötigt. Diese werden im Folgenden zusammengestellt.

6.9 Bezeichnung. *Die Brownsche Bewegung mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ wird mit B_t^x und das zugehörige Maß mit P^x bezeichnet. Die Brownsche Brücke mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}^n$, Endpunkt $y \in \mathbb{R}^n$ und zeitlichem Parameterbereich t wird mit $b_s^{x,y,t}$, $s \in [0,t]$ bezeichnet. Das zugehörige Maß sei $Q^{x,y,t}$.*

Das Brownsche Brückenmaß ergibt sich aus dem Wienermaß durch Bedingung auf die σ-Algebra $\sigma(B_t^{-1}(\mathbb{F}_t))$. genauer gilt

6.10 Lemma. *Sei $A \in \mathbb{F}_{t-}$. Dann gilt*

$$P^x(A) = \int_{\mathbb{R}^n} dy \; \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} Q^{x,y,t}(A).$$

Beweis. [17], p.39. □

6.11 Folgerung. *Die Feynman-Kac-Formel kann auch in der Form*

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dy \; \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} f(y) E\left[\exp\left(-\int_0^t V(b_s^{x,y,t})ds\right)\right]$$

geschrieben werden.

6.12 Lemma. *Ist $u \notin S$, so gilt die schwache Identität*

$$T_t^* \delta_u \overset{w}{\equiv} \frac{e^{-\frac{(y-u)^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} E\left[\exp\left(-\int_0^t V(b_s^{u,y,t})ds\right)\right].$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} T_t^* \delta_u(f) &:= \delta_u(T_t(f)) \\ &= E\left[f(B_t^u)\exp\left(-\int_0^t V(B_s^u)ds\right)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \; \frac{e^{-\frac{(y-u)^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} f(y) E\left[\exp\left(-\int_0^t V(b_s^{u,y,t})ds\right)\right]. \quad \square \end{aligned}$$

6.13 Lemma. *Seien $V, \mathbb{K}$ wie in (4.5) und μ eine Distribution mit kompaktem Träger. Sei U eine Umgebung von supp(μ) mit $U \cap S = \emptyset$. Dann konvergiert für alle $(\xi, \zeta) \in \mathbb{K}$ das Integral*

$$\begin{aligned} R_V(\xi,\zeta)[\mu](f) &= \int_0^\infty dt\ e^{-\xi t} \mu E\left[f(B_t^y)\exp\left(-\zeta\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right] \\ &= \mu\left(E\left[\int_0^\infty dt\ e^{-\xi t} f(B_t^y)\exp\left(-\zeta\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right]\right) \end{aligned}$$

Die Funktion ist holomorph in $\mathbb{K}$. Kurz bedeutet dies

$$R_V(\xi,\zeta)[\mu](f) = \mu(R_V(\xi,\zeta,x)[f]).$$

Beweis. Aufgrund der Ungleichung (6.6) erhalten wir für $Re(\zeta) > 0$

$$\left|\mu E\left[f(B_t^y)\exp\left(-\zeta\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right]\right| \le e^{-Re(\zeta)C_V t}\|f\|.$$

Damit konvergiert das Integral für $(\xi,\zeta) \in \mathbb{K}$ analog wie beim Beweis von (4.5). Da nach (6.5)

$$E\left[f(B_t^y)\exp\left(-\zeta\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right] \in C_b(U)$$

ist, folgt auch die Stetigkeit der Laplacetransformierten

$$\int_0^\infty dt\ e^{-\xi t}\mu E\left[f(B_t^y)\exp\left(-\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right] \in C_b(U).$$

Dieses Ergebnis erhalten wir wie folgt: Mit der Abkürzung

$$u_\zeta(x,t) := E\left[f(B_t^y)\exp\left(-\zeta\int_0^t V(B_s^y)ds\right)\right]$$

folgt nämlich für $(\xi,\zeta) \in \mathbb{K}$

$$|\int_0^\infty dt\ e^{-\xi t}u_\zeta(x,t) - \int_0^\infty dt\ e^{-\xi t}u_\zeta(x',t)| \le \int_0^\infty dt\ e^{-\xi t}|u_\zeta(x,t) - u_\zeta(x',t)|.$$

Ist $u_\zeta(\cdot,t)$ stetig in x, so gilt für alle x' mit $|x-x'| < \delta$, dass

$$|u_\zeta(x,t) - u_\zeta(x',t)| \le e^{-Re(\zeta)C_V t}\varepsilon.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dt\ e^{-\xi t}|u_\zeta(x,t) - u_\zeta(x',t)| \\ \le &\int_0^\infty dt\ e^{-(Re(\xi)+C_V Re(\zeta))t}\varepsilon \\ = &\frac{\varepsilon}{Re(\xi + C_V\zeta)}, \end{aligned}$$

was die Stetigkeit der Laplacetransformierten an den Punkten beweist, wo $u_\zeta(x,t)$ stetig ist.

Aus (4.5) erhalten wir somit die Behauptung. □

6.14 Folgerung. *Ist $u \notin S$ und V ein einfaches Potential, so ist*

$$\begin{aligned} R_V(\xi,\zeta)[\delta_u](f) &= E\left[\int_0^\infty dt\ f(B_t^y)\exp\left(-\int_0^t (\zeta V(B_s^u)+\xi)ds\right)\right] \\ &= \delta_u(R_V(\xi,\zeta,x)[f]) \end{aligned}$$

Desweiteren gilt schwach

$$R_V(\xi,\zeta)[\delta_u] \stackrel{w}{\equiv} \int_0^\infty dt\ \frac{e^{-\frac{(y-u)^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} E\left[\exp\left(-\int_0^t (\xi+\zeta V)(b_s^{u,y,t})ds\right)\right].$$

Mit diesen Vorbereitungen lässt sich nun die zu (4.8) analoge Aussage für Distributionen mit kompaktem Träger beweisen.

6.15 Folgerung (Globale Transformationsformel für Distributionen). *Ist $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ein surjektiver und eigentlicher harmonischer Morphismus mit Dilatation $d_\Phi(x) = \lambda(x)^{\frac{1}{2}}$, $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ und μ eine zulässige Distribution mit kompaktem Träger, so gilt*

$$R_V(\xi,\zeta)[\mu](f) = \mu\left(E\left[\int_0^\infty dt\ \Phi^* f(B_t^{\psi(x)})\exp\left(-\int_0^t \Phi^*(\xi+\zeta V)(B_s^{\psi(x)})ds\right)\right]\right)$$

nach Auswahl einer Linksinversen ψ von Φ.

Speziell etwa für die Deltadistribution lässt sich ein besseres Resultat erreichen. Dazu wird das Volumenelement von $\mathbb{R}^n$ entlang der Abbildung Φ zerlegt. Anschließende Integration über die Urbilder von Punkten aus $\mathbb{R}^n$ ergibt den Kern einer Distribution, die direkt auf den Anfangsbedingungen $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ wirkt und nicht nur auf ihren Transformierten $\Phi^* f \in C_b(\mathbb{R}^N)$.

6.16 Bezeichnung. *Sei $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ wie in (6.15). Mit x werden die Koordinaten in $\mathbb{R}^N$ und mit dx das zugehörige Volumenelement bezeichnet. y und dy bezeichnen das Entsprechende für $\mathbb{R}^n$. $K_y := \Phi^{-1}(y) \subset \mathbb{R}^N$ bezeichnet das Urbild von x und $dK_y(x)$ das entsprechende Volumenelement am Punkt $x \in K_y$. Außerdem bezeichne $*$ den Hodgeoperator.*

Die benötigten Tatsachen über die Zerlegung der Volumenform werden im folgenden Lemma zusammengefasst. Siehe dazu [10],p.2.

6.17 Lemma. *(1) Ist in $x \in \mathbb{R}^N$ der Rang der Kotangentialabbildung $T_x^*\Phi$ maximal, so ist*

$$\begin{aligned} dx &= \frac{T_x^*\Phi(dy) \wedge *T_x^*\Phi(dy)}{\|T_x^*\Phi(dy)\|^2} \\ &= \frac{T_x^*\Phi(dy)}{\|T_x^*\Phi(dy)\|} \wedge dK_y(x). \end{aligned}$$

(2) Ist $I : T_y^*\mathbb{R}^n \to T_y\mathbb{R}^n$ die Identifikation von Tangential- und Kotangentialraum mit Hilfe des Skalarproduktes und $C(x) := T_x\Phi \circ I \circ T_x^*\Phi : T_x^*\mathbb{R}^N \to T_x\mathbb{R}^N$, dann ist

$$\|T_x^*\Phi(dy)\|^2 = \det C(x).$$

Insbesondere ist der Rang von $T_x^*\Phi$ genau dann maximal, wenn $C(x)$ invertierbar ist.

(3) Speziell für den harmonischen Morphismus Φ ist

$$\begin{aligned} det[C^{ij}(x)] &= \det[(\nabla\Phi^i, \nabla\Phi^j)] \\ &= \det(\lambda(x)\delta^{ij}) \\ &= \lambda(x)^n. \end{aligned}$$

Beweis. Zu (1) und (2) siehe [10], p.2. (3) wurde praktisch bereits oben ausgerechnet. □

Mit dieser Maßzerlegung erhalten wir nun für die Deltadistribution die schwache Identität

6.18 Lemma. *Sei $u \notin S$. Dann erhalten wir für $(\xi, \zeta) \in \mathbb{K}$ die Darstellung*

$$\begin{aligned} R_V(\xi,\zeta)[\delta_u] \overset{w}{\equiv} \int_0^\infty dt \int_{K_y} dK_y(x) \frac{e^{-\frac{|x-\psi(u)|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} \\ \cdot \lambda(x)^{\frac{2-n}{2}} E\left[\exp\left(-\int_0^t \Phi^*(\xi+\zeta V)(b_s^{\psi(u),x,t})ds\right)\right]. \end{aligned}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} &R_V(\xi,\zeta)[\delta_u](f) \\ =&R_V(\xi,\zeta,u)[f] \\ \overset{(4.8)}{=}&E\left[\int_0^\infty dt\ \Phi^* f(B_t^{\psi(u)}) \exp\left(-\int_0^t \Phi^*(\xi+\zeta V)(B_s^{\psi(u)})ds\right)\right] \\ \overset{(6.10)}{=}&\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^N} dx\ \Phi^* f(x) \frac{e^{-\frac{|x-\psi(u)|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} E\left[\exp\left(-\int_0^t \Phi^*(\xi+\zeta V)(b_s^{\psi(u),x,t})ds\right)\right] \end{aligned}$$

wegen (6.17) und der Eigenschaft, dass die Urbilder K_y für eigentliche harmonische Morphismen kompakt sind, ergibt sich nun

$$
\begin{aligned}
R_V(\xi,\zeta)[\delta_u](f) &= \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^N} T_x^*\Phi(dy)dK_y(x)\frac{\Phi^* f}{\sqrt{\lambda}^n}(x)\frac{e^{-\frac{|x-\psi(u)|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} \\
&\qquad E\left[\exp\left(-\int_0^t \Phi^*(\xi+\zeta V)(b_s^{\psi(u),x,t})ds\right)\right] \\
&= \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{K_y} dK_y(x)\lambda(x)^{\frac{2-n}{2}} f(y)\frac{e^{-\frac{|x-\psi(u)|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} \\
&\qquad E\left[\exp\left(-\int_0^t \Phi^*(\xi+\zeta V)(b_s^{\psi(u),x,t})ds\right)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dy\ f(y) \int_0^\infty dt \int_{K_y} dK_y(x)\lambda(x)^{\frac{2-n}{2}} \frac{e^{-\frac{|x-\psi(u)|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} \\
&\qquad E\left[\exp\left(-\int_0^t \Phi^*(\xi+\zeta V)(b_s^{\psi(u),x,t})ds\right)\right]
\end{aligned}
$$

□

6.19 Satz (Dualität der Propagatoren). *Ist $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ein surjektiver und eigentlicher harmonischer Morphismus mit $\Phi^* V \equiv c$. Dann gilt für $(\xi,\zeta) \in \mathbb{L}$ (siehe (4.10))*

(1) $R_V(\xi,\zeta)[\delta_y](f) = R_{\frac{1}{V\circ\Phi}}(c\zeta, c\xi, \psi(y))[\Phi^* f]$

(2)

$$
\begin{aligned}
R_V(\xi,\zeta)[\delta_u] &\overset{w}{\equiv} \int_0^\infty dt \int_{K_y} dK_y(x)\frac{e^{-\frac{|x-\psi(u)|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} \cdot \lambda(x)^{\frac{2-n}{2}} \\
&\qquad E\left[\exp\left(-c\int_0^t \left(\zeta + \frac{\xi}{V\circ\Phi}\right)(b_s^{\psi(u),x,t})ds\right)\right]
\end{aligned}
$$

Beweis. (1) ist folgt aus (6.15) und (4.10). (2) erhält man nach Einsetzen des dualen Potentials in (6.18). □

6.20 Zwei Beispiele. Die Beispiele aus (4.12) sollen erneut betrachtet werden. Mit Hilfe der Mehlerschen Formel wird ein Ausdruck für den Propagator des 2- bzw. 3-dimensionalen Coulombpotentials gegeben. Wesentlich ist hierbei, dass die schwierige Frage der analytischen Fortsetzbarkeit hier wegfällt, da die Mehlersche Lösung für den harmonischen Oszillator explizit in den Parametern ξ, ζ hingeschrieben werden kann.

(1) Hier wird die Dualität gegeben durch ($\alpha = 2$)

$$
\begin{aligned}
R_{-\frac{1}{|z|}}(\xi,\zeta,x)[u_0] &= R_{4|z|^2}(\zeta,\xi,\psi(x))[\Phi^* u_0] \\
&= R_{|z|^2}(4\zeta,\xi,\psi(x))[4|z|^2 u_0(z^2)]
\end{aligned}
$$

mit $\Phi(z) = z^2$.

Für die Deltadistribution ergibt sich nach (6.19)

$$
\begin{aligned}
&R_{-\frac{1}{|z|}}(\xi,\zeta)[\delta_y](f) \\
&\quad = R_{|z|^2}(4\zeta,\xi,x^{\frac{1}{2}})[4|z|^2 f(z^2)] \\
&\quad = 4\int_0^\infty dt\ e^{4\zeta t} E\left[4|B_t^{\sqrt{x}}|^2 f((B_t^{\sqrt{x}})^2)\exp\left(-\xi\int_0^t |B_s^{\sqrt{x}}|^2 ds\right)\right] \\
&\quad = 4\int_0^\infty dt\ e^{4\zeta t}\int_{\mathbb{R}^2} du\ dv\ p_t^\xi(a(x),u)\ p_t^\xi(b(x),v)\cdot(u^2+v^2) f(u^2-v^2,2uv)
\end{aligned}
$$

mit $\sqrt{x} = a(x) + ib(x)$. Dabei ergibt sich der Propagator p_t^ξ durch die Mehlersche Formel

$$
p_t^\xi(x,y) = \frac{\exp[-\sqrt{\frac{\xi}{2}}(x^2+y^2)\coth(\sqrt{2\xi}t) - 2\sqrt{2\xi}xy\cdot\operatorname{cosech}(\sqrt{2\xi}t)]}{\sqrt{2\pi\sinh(\sqrt{2\xi}t)}}.
$$

Direktes Einsetzen in (6.18) ergibt

$$
\begin{aligned}
&R_{-\frac{1}{|z|}}(\xi,\zeta)[\delta_y](f) \\
&\qquad = \int_0^\infty \int_{K_z} dK_z(z')\frac{e^{-\frac{|z'-y|^2}{2t}}}{2\pi t} E\exp\left(4\zeta t - 4\xi\int_0^t |b_s^{\sqrt{y},z',t}|^2 ds\right).
\end{aligned}
$$

Wegen $K_z = \{\pm\sqrt{x}\}$ und $dK_z(z') = \frac{1}{2}[\delta(z'-\sqrt{z}) + \delta(z'+\sqrt{z})]$ folgt

$$
\begin{aligned}
R_{-\frac{1}{|z|}}(\xi,\zeta)[\delta_y] = \int_0^\infty dt\frac{e^{4\zeta t}}{4\pi t}&\left[e^{-\frac{|z'-y|^2}{2t}} E\exp\left(4\zeta t - 4\xi\int_0^t |b_s^{\sqrt{y},\sqrt{z},t}|^2 ds\right)\right. \\
&\left. + e^{-\frac{|z'+y|^2}{2t}} E\exp\left(4\zeta t - 4\xi\int_0^t |b_s^{\sqrt{y},-\sqrt{z},t}|^2 ds\right)\right].
\end{aligned}
$$

(2) Das dreidimensionale Wasserstoffatom

Hier ist

$$\Phi = (\Phi^1,\Phi^2,\Phi^3)$$

mit

$$\Phi^k(x) = (x, e_k x) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}.$$

Das Urbild eines Punktes $y \in \mathbb{R}^3$ ist für $y \neq 0$ eine 1-Sphäre. Als Bilder der Erzeugenden der Cliffordalgebra wählen wir

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Urbild ist ($y \neq 0$)

$$\Phi^{-1}(y) = \left\{ \sqrt{|y|} \left(\cos(\frac{\theta}{2}) \; \cos(\frac{\varphi + \gamma}{2}), -\cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\varphi + \gamma}{2}), \right. \right.$$
$$\left. \left. \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\varphi - \gamma}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\varphi + \gamma}{2}) \right) \middle| \; \gamma \in [0, 4\pi) \right\},$$

wobei φ und θ die sphärischen Winkelkoordinaten von $y \in \mathbb{R}^3$ sind.

Wegen $\lambda(x) = 4|x|^2$ folgt

$$\det C(x) = \lambda(x)^3 = 64|x|^6 = 64|y|^3,$$

die Determinante ist also auf $\Phi^{-1}(y)$ konstant. Mit $r = |y|$ folgt somit aus (6.18)

$$R_{-\frac{1}{|y|}}(\xi, \zeta)[\delta_p]$$
$$\stackrel{w}{\equiv} \int_0^\infty dt \int_0^{4\pi} d\gamma \frac{e^{-\frac{|U(r,\theta,\varphi,\gamma) - \psi(p)|^2}{2t} + 4\zeta t}}{8\pi^2 t^2} \cdot E \exp\left(-4\xi \int_0^t |b_s^{\psi(p), U(r,\theta,\varphi,\gamma),t}|^2 ds \right)$$

mit

$$U(r, \theta, \varphi, \gamma) := \sqrt{r} \left(\cos(\frac{\theta}{2}) \; \cos(\frac{\varphi + \gamma}{2}), -\cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\varphi + \gamma}{2}), \right.$$
$$\left. \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\varphi - \gamma}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\varphi + \gamma}{2}) \right).$$

Dieser Ausdruck entspricht dem Propagator im Impulsbild.

7. Diskussion.

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Dualität zwischen verschiedenen Potentialen in der Schrödingergleichung konstruiert. Die Schwierigkeit der analytischen Fortsetzung wurde bereits in der Einleitung genannt. Wie in (4.2) bemerkt wurde, lassen sich Pfadintegrale zu nach unten beschränkten Potentialen durch das ursprünglich von Feynman zur Definition von Pfadintegralen herangezogene Verfahren näherungsweise berechnen. Wenn für keines der dualen Potentiale eine exakte Lösung bekannt ist, liegt es daher nahe, folgendes Problem zu betrachten:

Problem 1. *Angenommen, das duale Potential W zu V ist nach unten beschränkt. Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[u_0(B_t)\exp\left(-\frac{\zeta t}{n}\sum_{k=0}^{n} W(B_{\frac{kt}{n}})\right)\right] = E[u_0(B_t)e^{-\zeta\int_0^t W(B_s)ds}]$$

nach dem Satz von Lebesgue. Welche Näherungen für das Pfadintegral zu V erhält man aus dieser Näherung für das Potential W ?

Um diese Frage zu beantworten und somit die Eichinvarianz zu benutzen, eine gute Näherungsformel für Pfadintegrale zu singulären Potentialen zu erreichen, muss man die Eigenschaften der analytischen Fortsetzung der Resolventenfunktion $R(\xi,\zeta,x)[u_0]$ studieren. Dies ist ein schwieriges Problem.

Die zweite Schwierigkeit ist ebenso offensichtlich. Die Transformationsformeln benötigen als Ausgangsdaten global definierte, surjektive harmonische Morphismen, die insbesondere eigentlich sein sollen, um etwa zu gewährleisten, dass sich Distributionen mit kompaktem Träger zurückziehen lassen. Ausser den affin konformen Abbildungen, die aufgrund ihrer konstanten Dilatation weitgehend uninteressant sind, und den holomorphen Funktionen im Fall $n = 2$ haben wir aber bislang nur die vier sphärischen harmonischen Morphismen als Beispiele eigentlicher Abbildungen gesehen. Es besteht in der Literatur ein gewisser Mangel an expliziten Konstruktionen harmonischer Morphismen. Also:

Problem 2. *Finde möglichst viele eigentliche harmonische Morphismen.*

Es ist sehr gut möglich, dass aufgrund der Starrheit harmonischer Morphismen nicht viele weitere Beispiele nichttrivialer exakter Korrespondenzen, wie sie in der Arbeit betrachtet wurden, bestehen. Es gibt aber im Prinzip die Möglichkeit, ohne die Benutzung harmonischer Morphismen Korrespondenzen zu konstruieren. Dabei wird allerdings im Allgemeinen keine so einfache Integralformel existieren, wie die, mit der hier die verschiedenen Systeme ineinander umgerechnet werden.

Problem 3. *Lokalisierung des Problems.*

Die Idee zu einer solchen Lokalisierung des Problems weg von globalen harmonischen Morphismen, liegt begründet in einer Analyse der globalen Formel. Es fällt auf, dass der Grund für das Verschwinden der Singularität des Wasserstoffatoms beim Übergang zum dualen Potential darin besteht, dass gleichzeitig λ im Ursprung verschwindet. Das Quadrat der Dilatation ist aber so etwas wie eine lokale Uhr in $\mathbb{R}^N$. Das Verschwinden von λ hat also zur Folge, dass die Pfade des zeittransformierten Prozesses die Singularität praktisch nie erreichen.

Wenn diese Zeittransformation also für die Regularisierung des Potentials verantwortlich ist, liegt es nahe, lokal durch eine stochastische Differentialgleichung einen Prozess auf $\mathbb{R}^n$ zu konstruieren, der auf die gleiche Weise den Ursprung nicht erreicht. Um hier eine analoge Kompensation der Zeittransformation, wie im globalen Fall durch den harmonischen Morphismus, zu erreichen, muss man allerdings die Kurzzeitasymptotik des durch die stochastische Differentialgleichung gegebenen Prozesses verstehen.

Literatur.

[1] P. Baird, *Harmonic Morphisms and Circle Actions on 3- and 4-Manifolds*, Ann. Inst. Fourier **40** (1990), 177–212.

[2] P. Blanchard, *Transformation of Wiener Integrals and the Desingularization of the Coulomb Problem*, Ann. Inst. Fourier **33** (1983), 219–240.

[3] L. Csink, B. Oksendal, *Stochastic Harmonic Morphisms: Functions mapping the Paths of one Diffusion into the Paths of another*, Ann. Inst. Fourier **33** (1983), 219–240.

[4] I.H. Duru, H. Kleinert, Phys. Lett. B **84** (1979), 30.

[5] B. Fuglede, *Harmonic Morphisms between Riemannian Manifolds*, Ann. Inst. Fourier **28** (1978), 107–144.

[6] A. Inomata, *Recent Developments of Techniques for Solving Nontrivial Path Integrals*, Lundqvist (Ed.), Path Summation, Achievements and Goals, Proc. of the Adriatico Research Conf. Trieste 1987, World Scientific, Singapore, 1988, pp. 114–145.

[7] B. Oksendal, *When is a Stochastic Integral Time Change of a Diffusion ?*, J. Theor. Prob. **3** (1990), 207–226.

[8] Yiu, *Quadratic Forms between Spheres and the non-existence of Sums of Squares Formula*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **100** (1986), 493–504.

[9] V. I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, Basel, 1990.

[10] J.M. Bismut, *Large Deviations and the Malliavin Calculus*, Prog. Math. 45, Birkhäuser, Basel, 1984.

[11] J. Eells, L. Lemaire, *Two reports on harmonic maps*, World Scientific, Singapore, 1995.

[12] N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland, 1981.

[13] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 3rd Edition, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.

[14] H. Kleinert, *Pfadintegrale*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1995.

[15] H. B. Lawson, M. L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[16] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations*, 3rd Edition, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[17] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.

[18] L.C.G Rogers, D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, Vol. 2: Ito Calculus, John Wiley & Sons, New York, Brisbane, Toronto, 1987.

[19] Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[20] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th Edition, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.

Bezeichnungen.

Brownsche Bewegung.

B_t^x	Brownsche Bewegung mitStartpunkt x
B_x	Brownsche Bewegung mit Startpunkt 0
$b_s^{x,y,t}$	Brownsche Brücke
$\mathbb{F}_t$	kanonische Filtrierung

Cliffordalgebra.

Cl_m^*	Cliffordalgebra (3.1)

Distributionen.

$\overset{w}{\equiv}$	schwache Gleichheit
δ_y	Deltadistribution

Harmonische Morphismen.

Φ	(h-) harmonischer Morphismus (1.6), (5.3)
d_Φ	Dilatation (2.1)
λ	Quadrat der Dilatation
N	Nullstellenmenge von λ
$\Phi^* f$	Liftung der Anfangsbedingung (4.9)
$T_x^{(*)}\Phi$	(Ko)tangentialabbildung

Potentiale.

C_V	Schranke eines nach unten beschränkten Potentials (4.1)
S	Menge der Nichtstetigkeitspunkte eines einfachen Potentials (6.3)

Resolventenfunktionen.

$R_V(\xi,\zeta,x)[f]$	Resolvente zu $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ (4.5)
$R_V(\xi,\zeta)[\mu]$	Resolvente zu $\mu \in C_b(\mathbb{R}^n)^*$ (6.13)
$\mathbb{K}$	Konvergenzbereich $Re(\xi + C_V\zeta) > 0$ (4.5)
$\mathbb{L}$	Konvergenzbereich $Re(\xi) > 0$, $c \cdot Re(\zeta) > 0$ (4.10)

Lebenslauf.

19.11.68	Geboren in Kassel
1974-1980	Besuch der Georg-August-Zinn-Schule in Morschen
1980-1984	Besuch der Burgsitzschule Spangenberg
1984-1987	Besuch der Geschwister-Scholl-Schule Melsungen
Mai 1987	Abitur
Oktober 1987	Beginn des Studiums der Mathematik und Physik an der Georg-August-Universität Göttingen
April 1989	Diplomvorprüfung Mathematik
Juli 1989	Diplomvorprüfung Physik
März 1991 - Mai 1992	Zivildienst im Krankenhaus Lenglern
Oktober 1993	Diplomprüfung Mathematik
Seit März 1994	Promotionsstudium bei Prof. Hering am Institut für Mathematische Stochastik